Las series de potencias en el proceso de formalización de lo trascendente en Matemáticas

JORGE ENRIQUE MENDOZA GUZMÁN

UNIVERSIDAD DEL VALLE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2017

Las series de potencias en el proceso de formalización de lo trascendente en Matemáticas

JORGE ENRIQUE MENDOZA GUZMÁN

Trabajo de grado presentado al Programa Académico Maestría en Ciencias Matemáticas como requisito para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas
Director

Dr Luis C Recalde

UNIVERSIDAD DEL VALLE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA ACADÉMICO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2017

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2017

JORGE ENRIQUE MENDOZA GUZMÁN, 1990

Las series de potencias en el proceso de formalización de lo trascendente en Matemáticas

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Las series de potencias en el proceso de formalización de lo transcendente en Matemáticas.

Autores:

Nombre: Jorge Enrique Mendoza Guzmán Firma: C.C. 1112958358

Nombre: Firma: C.C.

Nombre: Firma: C.C.

Fecha:

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

Universidad del Valle

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ACTA DE SUSTENTACIÓN DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA EN CIENCIAS-MATEMÁTICAS

Jurado conformado por los profesores:

Dra. Martha Lucia Bobadilla Alfaro, Universidad del Cauca, Popayán.

Dra. Humberto Mora Martínez, Universidad del Valle.

El día miércoles 25 de octubre de 2017, a las 09:00 a.m., se llevó a cabo la sustentación del Trabajo de Investigación de Maestría: **"LAS SERIES DE POTENCIAS EN EL PROCESO DE FORMALIZACIÓN DE LO TRASCENDENTE EN MATEMÁTICAS"**, presentado por el estudiante **Jorge Enrique Mendoza Guzmán,** código 1404004, Plan 7179, candidato a grado para la próxima ceremonia.

RESULTADO DE LA EVALUACIÓN:

(X) APROBADA ( ) MERITORIA ( ) LAUREADA

Regístrese esta calificación.

( ) REPROBADA: El estudiante debe matricularse en esta actividad.

( ) PENDIENTE: El estudiante debe acoger las recomendaciones del jurado y presentar nuevamente el documento ante el Director de Tesis.

( ) Requiere ( ) No requiere nueva sustentación.

El plazo para nueva sustentación y/o presentación del documento es de: ______________________

OBSERVACIONES

El jurado considera que la exposición del estudiante fue excelente.

Santiago de Cali, 25 de octubre de 2017.

Dra. Martha Lucia Bobadilla Alfaro
Jurado

Dr. Humberto Mora Martínez
Jurado

Dr. Luis Recalde Caicedo
Director del Trabajo de Investigación

Dra. Doris Hinestroza Gutiérrez
Coordinadora de la sustentación
Directora del Programa Académico

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del Jurado 1

Firma del Jurado 2

Agradecimientos

Al profesor Luis Recalde, por su acompañamiento en este arduo proceso del posgrado. A mis padres Gloria y Jorge por su apoyo. Ingry por su compañía y colaboración.

A la memoria de Luis Pineda

«He tenido muchas ideas y que quizás pueden ser útiles con el tiempo, si otros con más penetración que yo, calan profundamente en ellas algún día, y unen la belleza de sus mentes con el trabajo de la mía. . . »

G Leibniz

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

Índice de algoritmos

Resumen

En esta tesis hemos desarrollado un análisis de orden histórico epistemológico relacionado con la introducción de lo trascendente en Matemáticas. Se intenta mostrar que las series infinitas constituyeron la herramienta conceptual mediante la cual se le dio estatuto matemático a lo trascendente. En este sentido, es preponderante mostrar los diferentes momentos históricos en que empieza a emerger lo trascendente en Matemáticas, entendiendo lo trascendente en el sentido de Leibniz. De esta forma los trabajos de Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Leibniz (1646-1716), Brook Taylor (1685-1731), Colin Maclaurin (1698-1746), Leonhard Euler (1707-1783) y Augustin Cauchy (1789-1857), fueron claves a lo hora de rastrear la incorporación de lo trascendente. De esta forma, mostramos los puntos culminantes de dicho desarrollo.

Palabras claves. Series de potencias, trascendente, convergencia, curvas.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se suscribe en la línea de investigación de Historia y Educación Matemática de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle. Abordaremos algunos aspectos relacionados con la introducción de lo trascendente en Matemáticas. Para ello es necesario analizar el tránsito de la curva a la ecuación y de la ecuación a la función, en este circuito se vislumbran grandes rasgos y características de lo que modernamente conocemos como trascendente. En esta indagación se develarán los aspectos operativos y de validación de lo trascendente y la forma cómo históricamente se fueron constituyendo dichos elementos. Para esta investigación hemos tenido en cuenta los siguientes aspectos:

1. Históricamente el edificio de las Matemáticas ha sido constituido por diferentes aportes provenientes de matemáticos de diferentes latitudes y de todas las épocas; en este sentido se considera las Matemáticas como un constructo histórico.

2. El uso, la introducción y representación de los objetos que pueblan el universo matemático ha sido clave a la hora de avanzar en la constitución de las Matemáticas particularmente en el desarrollo del cálculo; en nuestro caso, la representación mediante series de potencias fundó nuevas representaciones, las cuales solucionaron problemas relacionados con cuadraturas y sumas infinitas.

3. Esta investigación es la continuación de la investigación realizada en el pregrado, en la cual se mostró la transición histórica y epistemológica del circuito curva, ecuación y función. En esta tesis, se darán respuesta a algunos interrogantes que no quedaron profundamente considerados en el pregrado. Principalmente, se hará énfasis en la manera mediante la cual se incorpora lo trascendente en Matemáticas.

4. En el trabajo de pregrado quedaron algunos interrograntes los cuales no fueron respondidos en su totalidad. De esta forma, este trabajo de Maestría busca dar respuesta a aquellos interrogantes que no qu quedaron sta razón se busca dar respuesta a ciertos interrogantes que en el trabajo mencionado no quedaron profundamente considerados.

5. La consolidación de la teoría de series fue clave a la hora de establecer e incorporar lo trascendente en Matemáticas.

En la presente tesis se realizó un análisis histórico-epistemológico de algunas nociones del cálculo, con el propósito de mostrar que las series de potencias constituyeron una herramienta conceptual en el proceso de incorporación de lo trascendente al cuerpo teórico de las Matemáticas. Para ello se tomaron como fuentes primarias: *De Analysi* [Newton II 1711], *el Curso de Análisis* [Cauchy 1821], *el Análisis Infinitesimal* [Leibniz 1684], *el Método de Incrementos* [Taylor 1715] y *el Tratado sobre Fluxiones* [Maclaurin 1801]; las obras mencionadas juegan un papel crucial en la búsqueda y la forma en que se logra incorporar lo trascendente en Matemáticas; son obras pioneras directamente relacionadas con la representación mediante series de potencias.

Por otra parte algunas obras secundarias que vale la pena mencionar son: [Ferraro I 2007], [Ferraro II 2003] y [Ferraro IV 2008]. Estos trabajos tienen mucha relación con el ingreso de las series de potencias y la relación con lo trascendente. De esta manera estas fuentes nos proporcionaron una serie de elementos conceptuales y cronológicos del desarrollo de la teoría de series.

Modernamente, la idea de lo trascendente en Matemáticas está relacionada con las funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas y los sistemas numéricos. Sin embargo, en los currículos de Matemáticas el primer acercamiento que se da a lo trascendente es a partir de los números reales trascendentes tales como π, e entre otros. Consideramos que esta concepción es errónea, tal como mostraremos en este trabajo a nivel del desarrollo histórico- epistemológico, lo trascendente se da primero por la adopción de las curvas mecánicas y no por los sistemas numéricos. Exactamente, lo trascendente adquiere relación directa con los sistemas numéricos en 1872 con la construcción de los números reales por parte de Cantor y Dedekind.

Vale la pena mencionar que el término «trascendente» fue introducido por Gottfried Leibniz (1646-1716) en su obra el *Analisis infinitesimal*[1]. Leibniz reconoce la existencia de problemas que trascienden los definidos por los antiguos, entre ellos los problemas sólidos, planos, supersólidos y de algún grado definido. Para Leibniz, existen problemas que trascienden las ecuaciones algebraicas de Descartes; entre estos problemas se destacan el cálculo en curvas logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. Para Leibniz, este tipo de problemas no deben ser excluidos de la Geometría sino que requieren un tratamiento especial. Con esta idea lo trascendente está relacionado primigeniamente con las curvas mecánicas. Es por esta razón que la directriz de este trabajo es analizar la idea de lo trascendente en Matemáticas en relación directa con las curvas mecánicas, donde las series de potencias fueron claves para la incorporar este tipo de curvas en la Matemática.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar que las series de potencias constituyeron la herramienta conceptual mediante la cual se le dio estatuto matemático a lo trascendente. De hecho, las series de potencias marcan un momento clave para poder establecer una presentación formal de lo trascendente, porque a través de ellas lo trascendente ingresa a la matemática de manera formal. Históricamente, consideramos que en las series de potencias subyace el eslabón perdido, para poder representar y manipular lo trascendente. Específicamente, en esta indagación histórica la identificación de las fuentes primarias es clave para poder precisar el momento en que lo trascendente se relaciona con las series de potencias.

Para lograr el objetivo general: mostrar que las series de potencias constituyeron la herra-

[1] Ver [Leibniz 1684, p.20]

mienta conceptual mediante la cual se le dio estatuto matemático a lo trascendente, organizamos este trabajo en cinco capítulos. En el primer capítulo presentamos un análisis relacionado con los antecedentes de lo trascendente en Matemáticas. Concretamente, se muestran algunos aspectos claves donde se presentan los diferentes contextos, donde emerge lo trascendente. En el segundo capítulo se muestra el desarrollo histórico de las series numéricas, y el tratamiento brindado por sus máximos exponentes. Entre estos se destacan Arquímedes, Mengoli, Wallis y Cauchy. Las series numéricas se constituyen en el insumo inicial para establecer representaciones de cantidades trascendentes. En el tercer capítulo se exponen las series de potencias como herramienta fundamental que permitió introducir lo trascendente en Matemáticas. En este sentido, se muestra los aportes de las fuentes primarias mencionadas anteriormente. En el cuarto capítulo se muestra la convergencia de series de funciones y se brinda una clasificación a las series infinitas. El quinto capítulo es dedicado a las conclusiones.
A continuación detallamos el contenido de estos cinco capítulos.

En el primer capitulo se muestran los antecedentes de lo trascendente en Matemáticas y la manera como fue evolucionando dicha concepción. Lo trascendente en la antigüedad, comienza a surgir con la aparición de las magnitudes inconmensurables y la imposibilidad por ejemplo de comparar la diagonal del cuadrado con uno de sus lados. Así mismo, en la resolución de ecuaciones se tienen los primeros atisbos de soluciones irracionales. Cabe señalar que en la época no existía una conciencia de que dichas soluciones eran irracionales. Esta problemática fue dando entrada a las cantidades irracionales, las cuales no tenían un sustento teórico bien definido. Por otra parte, en la edad moderna Descartes establece su clasificación inicial de curvas, las cuales dividió en geométricas y mecánicas. A partir de esto, surge el inconveniente de que a las curvas mecánicas no era posible asignarles una ecuación algebraica en el sentido de Descartes. Justamente la imposibilidad de amarrar una ecuación a las curvas mecánicas fue abriendo camino a otro tipo de expresiones matemáticas, las cuales, Descartes desconocía. Este capítulo comprende 4 secciones, que describimos a continuación.

En la sección 1.1 se mencionan los problemas en la antigüedad donde se visualizan los primeros rasgos relacionados con lo trascendente. En esta búsqueda nos encontramos con la aparición de las cantidades inconmensurables, de hecho, en la antigüedad no existía un corpus teórico que sustentara dichas cantidades. Esto fue delineando la necesidad de incorporarlas a la Matemática, donde dicha incorporación fue posible en 1872 con la construcción de los reales por parte de Cantor y Dedekind.

En la sección 1.2 se muestra que Descartes en la *Geometría* no pudo amarrar una ecuación algebraica a una curva mecánica, por tanto dichas curvas fueron relegadas de la geometría. Esto mostró que la geometría analítica no era suficiente para modelar el comportamiento paramétrico de estas curvas. Descartes y su clasificación son claves en el desarrollo e incorporación de lo trascendente, puesto que las curvas mecánicas al ser excluidas de la geometría se convierten en objeto de interés por los matemáticos de la edad moderna. Entre ellos se destaca Newton el cual en su obra *Dy analyse* manipula las mencionadas curvas mecánicas, logrando asociarle una serie de potencias la cual permitía obtener propiedades de la curva.

En la sección 1.3 se realiza la discusión pertinente con la curvas mecánicas. Se muestra que en el trabajo de Fermat se manipularon este tipo de curvas geométricamente pero que no fue posible asociarles una ecuación algebraica. En este sentido, consideramos que este tipo de curvas son muy especiales en la Matemática puesto que convirtieron en el ingrediente faltante para la consolidación de la teoría de series.

En el segundo capítulo se realiza la historiografía relacionada con las sumas infinitas y el tránsito a las series numéricas. Este capítulo se ha dividido en 7 secciones; en la sección 2.1 se muestra un diagrama donde se categorizan los primeros representantes que manipularon las series numéricas. Se toma como directriz tres momentos claves en la historia de las series numéricas. El primer momento la antigüedad griega; comenzando por la paradoja de Zenón y la imposibilidad de recorrer una distancia finita en una infinidad de pasos. Adicionalmente, la manera en que Arquímedes aplica el método exhaustivo en la cuadratura de la parábola. Como segundo momento, el siglo XVI se comienza por Wallis, Mengoli y la forma cómo utilizan las series numéricas para encontrar resultados y cuadraturas. El tercer momento corresponde a los siglos XVII-XVIII; en esta época se comienza a vislumbrar un proceso de formalización pasando por Leibniz, Euler, Newton, hasta terminar parcialmente en Cauchy. Las relaciones entre estos tres momentos no fueron lineales, puesto que en el proceso de fundamentación se pueden identificar ciertos obstáculos de orden epistemológico que eran referidos al horror al infinito. En este sentido, la instauración en la Matemática de las series numéricas es un proceso recursivo donde los conocimientos primigenios acerca de ellas sirvieron de sustento teórico para ir incorporando nuevos conocimientos a la teoría de series.

En la sección 2.2 se establece que la paradoja de Zenón constituyó un elemento inicial relacionado con el uso de las series numéricas y la relación directa con un problema físico. En la sección 2.3 se muestra la concepción que se tenía en el siglo XVII de las series numéricas y la relación con el uso del método exhaustivo; establecemos que el método exhaustivo, no fue un método de encontrar o descubrir, sino de justificar resultados conocidos. Precisamente, con la utilización del método exhaustivo por parte de Arquímedes, se estableció un mecanismo de razonamiento riguroso; en algunos casos la aplicación de este mecanismo era compleja, debido a la doble reducción al absurdo que implicaba el método. En la sección 2.4 se describen algunos aspectos de la obra de Pietro Mengoli quien proporciona un tratamiento a las series numéricas mediado por lo intuitivo y una serie de axiomas que permiten decidir cuando una serie converge. En la obra de Mengoli se evidencia el tratamiento de lo infinito como si fuera una extensión de lo finito.

En el apartado 2.5 se describe la forma en que Wallis manipula las razones de series infinitas. En Wallis encontramos un tratamiento relacionado con el infinito y el uso de una especie de inducción aplicada a series numéricas de la forma $\frac{\sum a_n}{\sum l}$. De hecho, Wallis encuentra una serie de resultados los cuales le permiten encontrar cuadraturas de curvas de la forma x^n. Cabe señalar que Wallis no posee la noción de límite, pero en su trabajo realiza una «aproximación» a lo que modernamente es la noción de límite.

En la sección 2.6, se analiza que en la línea de desarrollo de las series numéricas, emergen las series para el logarítmo. Mercator encuentra expresiones para los logaritmos; dichas expresiones permiten el cálculo de cantidades logarítmicas, las cuales como veremos mas adelante serán llamadas por Leibniz cantidades trascendentes[2].

En la sección 2.7 se establece que el desarrollo de las series numéricas presenta sus puntos máximos en los trabajos de Cauchy, concretamente en el *Curso de Análisis* [Cauchy 1821]; en esta obra se vislumbra una rama de las Matemáticas que es el Análisis, en la cual se realiza y formaliza el tratamiento a las series infinitas. Cauchy define y formaliza cuando una serie es convergente. Para ello proporciona una serie de criterios, los cuales permiten empaquetar en familias los diferentes tipos de series. En términos generales en la obra de Cauchy se encuentra un tratamiento sistemático y unificado de las series infinitas que da cuenta de la visualización del concepto de límite; pero más allá del compendio sistemático, se estaba inaugurando un método y un formalismo el cual reivindicaba las ideas provenientes de los siglos anteriores referentes a las series numéricas convergentes.

En el tercer capítulo se divide en 7 secciones; este capítulo muestra cómo las series de potencias dieron entrada a lo trascendente. Específicamente, nuestra tesis principal radica en que las series de potencias brindaron y proporcionaron estatuto matemático a lo trascendente; es decir que las series de potencias se constituyen en sí mismas en el eslabón perdido que Descartes no poseía. Justamente, la inexistencia de una aplicación que permitiera relacionar las series de potencias y las curvas trascendentes representó un problema de investigación que tardó menos de un siglo para que comenzara a ser parcialmente resuelto por los matemáticos de la época. Las series de potencias comienzan a tener gran relación con lo trascendente, cuando en los trabajos de Newton, Leibniz, Taylor y Maclaurin se logran desarrollar métodos algoritmos que permitieron acoger y expresar las funciones trigonométricas, logarítmicas y las curvas mecánicas en términos de series infinitas. Por un lado, la representación de funciones mediante series de potencias fue algo muy estudiado por los 4 autores mencionados, pero el representar una función arbitraria mediante series de potencias da lugar a discusiones relacionadas con el dominio de las series de potencias. A partir de esto, el problema de la representación de funciones mediante series de potencias va adquieriendo mayor

[2]Leibniz es el primero en utilizar el término trascendente en su *Análisis infinitesimal* [Leibniz 1684, p.20], precisamente lo trascendente para Leibniz esta relacionado con los problemas que no son planos ni sólidos ni supersólidos o de grado alguno definido, sino que trascienden cualquier ecuación algebraica.

estatus en el sentido de que surgen cuestiones como, ¿qué tipo de expresiones son representables por una serie de potencias?, más aún, ¿toda función es representable mediante una series de potencias?

En la sección 3.1, se analiza el trabajo de Newton y la manera cómo manipula las series de potencias en el *Dy Analysi* [Newton II 1711]. De acuerdo al desarrollo histórico de las series de potencias, consideramos a Newton como uno de los precursores de la teoría de series, puesto que en su obra se evidencia el primer paso hacia la representación de las curvas mecánicas como series infinitas. Con Newton se inaugura una novedosa forma de hacer Matemáticas en el sentido de que recurre a procesos de orden infinito, y en la mayoría de los casos sus resultados apuntan a series de potencias. Podemos establecer que Newton se convierte en uno de los grandes exponentes de las series de potencias. La manera en que Newton usó las series tuvo gran relación con el problema de la cuadraturas. Newton expone gran maestría en el tratamiento y manipulación de curvas geométricas y mecánicas; estás ultimas logra asociarles una expresión algebraica la cual corresponde a una serie de potencias. Al parecer Newton tenía un interés especial por las curvas que Descartes relegó de la Matemática. Por otra parte, en la subsección 3.1.1 se muestra la forma en que Newton deduce las series de potencias para el seno y coseno. La deducción de estas series se da a partir de un argumento de orden geométrico. El hecho de encontrar una serie de potencias que relacionara una función trigonométrica se convierte en un elemento fundamental, donde se vislumbra la incorporación de cantidades trascendentes a la Matemática.

En la sección 3.2 se muestra que para Leibniz las series son magnitudes de tipo geométrico, donde a partir de la conformación de magnitudes es posible conformar la suma de una serie geométrica[3]. Una de los aspectos claves en el trabajo de Leibniz es suponer que la solución de algunas ecuaciones diferenciales, correspondía a una serie de potencias. A partir de esto cabe preguntarse, ¿qué llevó a Leibniz a suponer que la solución de una ecuación diferencial era una serie de potencias?

Para responder a esta pregunta, consideramos que debido a la época en que se dieron los trabajos de Leibniz (siglo XVII), las series de potencias se encontraban en emergente furor. En este sentido, compartimos la idea de [Ferraro III 2000, p.44] quien menciona, que el uso de las series infinitas era relativamente nuevo y Leibniz sintió la necesidad de convencer a sus lectores que una serie infinita podría corresponder realmente a una cantidad finita. Esta concepción por parte de Leibniz, causó críticas debido a que en la época los procesos infinitos no eran bien vistos por la comunidad matemática, debido al uso de algunos artificios matemáticos los cuales no eran bien fundamentados.

A pesar de las críticas y dificultades de sus trabajos, lo novedoso es que estos resolvían un cúmulo de problemas que daban cuenta de cuadraturas y rectificaciones de curvas, un elemento diferenciador con respecto a la Geometría cartesiana. Para la fecha los métodos de validación de

[3]Leibniz establece este tipo de resultados en *De quadratura arithmetica p. 71-73*

resultados eran en cierta manera intuitivos, en el sentido de que suponían que un resultado era válido para algunos casos (finito) y luego se extendía ese resultado a lo infinito; esta suposición dejaba aun lado la noción de convergencia; los resultados obtenidos por Leibniz eran aceptados por la comunidad. De esta forma expresamos firmemente que el uso emergente de las series de potencias dió lugar a que problemas que estaban sin resolver adquirieran muchas líneas de desarrollo.

En la sección 3.3, se analiza uno de los grandes aportes del matemático Brook Taylor, el cual encuentra un algoritmo para expresar cantidades mediante series de potencias. Aunque el teorema de Taylor en términos modernos lo hemos ubicado como anexo (Sección 6), en esta sección se analiza el teorema a partir de la fuente primaria denominada *Método de Incrementos* [Taylor 1715, p.37]. Taylor logra encontrar una manera de expresar una cantidad variable en términos de otras. No obstante, el lenguaje y la notación usada por Taylor son confusos y, en algunos casos, no proporciona ejemplos de los teoremas demostrados. Claramente los problemas de rigor, como se evidencia en la obra de Taylor, se dejan de lado, la comunidad matemática válida los resultados en forma intuitiva. Una crítica al trabajo de Taylor, es que la notación usada en [Taylor 1715] es muy confusa, en el sentido de que no es claro el uso de algunos símbolos, tal como lo establece el traductor de la obra de Taylor, Ian Bruce.

En la sección 3.4, se demuestra el teorema de Maclaurin[4]; el cual modernamente corresponde a una serie de Taylor centrada en $x = 0$. Para Maclaurin la representación mediante series estaba ligada a encontrar una expresión general que estuviera amarrada a una serie de potencias. Lo interesante del trabajo de Maclaurin es suponer que una cantidad variable puede expresarse mediante una expresión de la forma $A+Bz+Cz^2+\cdots+$, luego utilizando las fluxiones de Newton, encuentra los valores de las constantes A, B, C, obteniendo la serie deseada.

Las secciones 3.5 y 3.6 son dedicadas a Euler; sus trabajos constituyen un primer escalón respecto a la representación mediante series numéricas y la manera de relacionar los números trascendentes. Euler obtiene la expansión para π; además utiliza las series trigonométricas para asociarlas a problemas de orden físico. En su obra se estaba inaugurando una técnica de representación de cantidades variables, mediante series de senos y cosenos. Sin embargo, la manera de representar expresiones a traves de senos y cosenos estaba asociada a problemas de cuerdas y la relación con las oscilaciones de las mismas. En la sección 3.7 relacionamos el artículo [Mendoza II 2013] con algunos resultados obtenidos por Bernoulli, respecto a la representación en series de potencias. Exactamente hemos detectado que en una de las cartas[5] enviadas por Johann Bernoulli a Leibniz en 1694, se obtiene una fórmula la cual expresa la integral $\int ndz$ en términos de una serie de potencias. Concretamente la relación de nuestro artículo con la carta de Bernoulli radica en que hemos deducido la misma fórmula, utilizando otro procedimiento algorítmico; la fórmula encontra-

[4]Esta demostración se ha realizado como aparece en su Tratado de fluxiones, ver [Maclaurin 1801, p.198]

[5]La carta en mención es enviada por Johann Bernoulli a Gottfried Leibniz el 2 de septiembre de 1694. Ver [Leibniz 1693, p.37].

da funciona para algunos casos particulares bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad, la cual corresponde al aporte de la investigación que se viene realizando desde el pregrado.

En el cuarto capítulo se divide en cinco secciones. En este capítulo se muestra la historiografía de las series de funciones. Claramente, el problema de la representación de funciones mediante series de potencias fue muy estudiado por los matemáticos en los siglos XVII y XVIII; su estudio se fue direccionando hacia caracterizar el tipo de series que convergían y bajo que condiciones lo hacían. De esta manera la solución a problemas de orden físico, como la conducción del calor y el problema de la cuerda vibrante dieron entrada a la representación mediante series trigonométricas; esto conllevó a plantearse preguntas de este orden: ¿toda función era representable por una serie trigonométrica?

Ciertamente, tras la aparición de las primeras series trigonométricas podemos distinguir los diferentes tipos de series infinitas existentes en el siglo XVII-XVIII. Por un lado se destacan las series geométricas, trigonométricas, de potencias, alternantes entre otras. En este capítulo realizamos una clasificación de las series conocidas durante estos siglos.

Por otra parte los criterios dados por Cauchy, se convirtieron en un elemento diferenciador que permitía distinguir cuales series convergen. La demostración del hoy nombrado falso teorema de Cauchy, dió lugar a la emergencia de los conceptos denominados convergencia puntual y uniforme.

En la sección 4.1 se estudia que las series de potencias en el siglo XVIII se concebían como una secuencia infinita o finita de términos los cuales tendían a cero (en valor absoluto). Claramente esta concepción no acogía casos como la serie armónica. Sin embargo, en el siglo XVIII las series emergentes como las trigonométricas se convirtieron en el interés de los matemáticos, puesto que en muchos casos las series trigonométricas eran solución de problemas de orden físico. En la sección 4.2 se analiza el surgimiento del concepto de convergencia. Para ello es necesario analizar los problemas de la cuerda vibrante y la conducción del calor; consideramos que en estos problemas se encuentran los elementos primigenios que dieron lugar a la noción de convergencia.

En la sección 4.3 mostramos que las series alcanzan el climax en el curso de análisis de Cauchy. La constitución de los criterios que permitían decidir acerca de la convergencia de una serie fue decisiva en la constitución del Análisis como rama de las Matemáticas. Evidentemente, la obra de Cauchy se convirtió en el punto de partida para que se generaran más trabajos relacionados con series. En la sección 4.4 se menciona el teorema de aproximación de Weierstrass. Este teorema garantiza la existencia de una serie de potencias, la cual se aproxima a una función. En la sección 4.5 se proporciona una clasificación de las series conocidas hasta mediados del siglo XVII.

En el capítulo cinco se presentan las conclusiones. Se sustenta que las series de potencias son la herramienta conceptual mediante la cual ingresó lo trascendente en la Matemática. De hecho, lo trascendente ingresa primigeniamente en la Matemática más por la evolución de las curvas que por los sistemas numéricos. De hecho, lo trascendente tiene relación con lo numérico puesto que existen manipulaciones para las curvas que dan lugar a la aparición de números trascendentes, por ejemplo cuando Wallis encuentra la cuadratura del círculo; tanto las curvas como los sistemas numéricos son elementos complementarios para que sé de lo trascendente. Pero, como se mencionó al comienzo de esta introducción nos interesa analizar lo trascendente en relación con las curvas.

De acuerdo al análisis histórico-epistemológico realizado, hemos establecido que el desarrollo de lo trascendente en Matemáticas se puede resumir en tres momentos: El primer momento denominado *Momento Primario de lo Trascendente*, el segundo *Momento Pre formal de lo Trascendente* y por último *el Momento Formal de lo Trascendente*. Esta categorización lleva de fondo el circuito curva- ecuación- función, puesto que a partir de este circuito es donde se comienza a evidenciar lo trascendente.

1. CAPÍTULO I. LA EMERGENCIA DE LO TRASCENDENTE EN MATEMÁTICAS

1.1. Antecedentes de lo trascendente en la antigüedad

Históricamente las Matemáticas se pueden concebir como un constructo realizado a partir de los diferentes aportes de matemáticos en diferentes épocas. Es a partir de estos aportes que se logran resolver problemas matemáticos de uso práctico cuyas soluciones permitirán, de una u otra manera, el desarrollo de conocimiento. Concretamente, existen momentos en la historia que las soluciones de los problemas no están bien fundamentadas debido a la inexistencia de un formalismo o rigor. Un ejemplo donde esto se evidencia es en los trabajos de los Babilonios y Egipcios, donde se encuentran rasgos de cálculos astronómicos de áreas y perímetros que de una u otra manera solventaron ciertas necesidades de agrimensura y repartición de herencias; en este sentido se comparte la idea de [Miranda 1988, p.8]

> ...Es interesante observar la naturaleza empírica de la matemática prehelénica que sin haber llegado a la demostración lógica, y la poca importancia que dieron a la diferencia entre verdad exacta y aproximada, atacaron con éxito una extensa diversidad de problemas.

Justamente, los protocolos de validación de los resultados obtenidos en el caso de resolución de problemas por parte de los Babilonios eran tomados a simple vista como intuitivos y obvios; si bien daban cuenta de la solución del problema, no pretendían vislumbrar algún tipo de "rigor", solamente era suficiente resolver el problema como un caso particular; la generalización no era aparentemente algo relevante para los Babilonios. Al parecer, los Babilonios se interesaban por solucionar el problema, más no se preguntaron acerca de la validez del aparato teórico y axiomático que podían haber empleado; su conocimiento inicial se fue constituyendo en un punto de partida para la medición de objetos lo cual permitió obtener resultados coherentes. Precisamente, este conocimiento aceptado en su momento por la comunidad Babilónica comienza a sufrir una serie de adaptaciones al pasar las generaciones y sufrir algo denominado rupturas epistemológicas. Bachelard concibe las rupturas epistemológicas como discontinuidades en el proceso del conocimiento o en el desarrollo histórico de las ciencias, que obliga a concebir el conocimiento mismo no solo como la historia del progreso científico sino también como una sucesión de cortes o «saltos» (epistemológicos), en los que la fase posterior supone una negación, crítica o superación de los errores de la fase anterior; el conocimiento avanza a través de continuas rupturas epistemológicas[6]. Es decir, de graduales rectificaciones de errores precedentes, superando los esquemas y cánones convencionalmente aceptados por una comunidad.

[6] Tomado de diccionario de filosofía

En este sentido, hay un cambio de paradigma entre el quehacer matemático en la antigüedad y cómo lo es actualmente. Este cambio se encuentra vinculado con los protocolos demostrativos, lógicos, argumentativos y pragmáticos aceptados por una comunidad, los cuales, dependiendo de sus necesidades, han ido construyendo un aparato teórico que dé cuenta de teorías y procedimientos que les permita explicar su entorno. Así, enunciados como el postulado de las paralelas "Por un punto exterior a una recta solo pasa una paralela" son válidos en la geometría Euclidiana, pero no válidos en la geometría de Riemann. De esta forma podemos observar que la validación de algún enunciado depende de la axiomática definida y que la demostración va ligada a la aceptación de la comunidad matemática.

Para referirnos a los procesos de validación y demostración en Matemáticas, es necesario tener en cuenta una gran distinción entre demostración y validación; la demostración se desarrolla desde una perspectiva de orden lógico, secuencial, estructurado e hipotético, mediante el cual se parte de una serie de hipótesis, axiomas, proposiciones y se llega a una tesis. De esta forma, compartimos la idea de [Balacheff 2000, p.13], quien considera la demostración como una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. Claramente esta idea vincula a la demostración en Matemáticas una axiomática y estructura lógica que entra en juego a la hora de "demostrar" una proposición. De acuerdo con [Balacheff 2000, p.13], para llegar a la demostración es necesario considerar dos etapas apriori: La primera etapa denominada la explicación y la segunda corresponde a la prueba. Es decir, que para llegar a la idea de demostración en Matemática, se hace necesario recorrer el circuito explicación-prueba-demostración. La distinción entre estos tres momentos es referida a que en la explicación interactúa el locutor a través del discurso con el fin de dar a entender cierta proposición a sus interlocutores, mientras que la prueba se constituye como el paso a seguir tras la explicación, es decir la aceptación y reconocimiento por parte de una comunidad, tal como lo establece el autor. De esta manera la demostración se sitúa desde una posición mas general, donde la característica esencial es su forma estrictamente codificada.

Por otra parte, la validación en Matemáticas está relacionada íntimamente con la demostración en un contexto social determinado; lo válido se encuentra en la aceptación de los axiomas por parte de la comunidad matemática; y a su vez, depende de los contextos y las comunidades socioculturales. De esta manera, la demostración pasa a ser parte de la validación, porque a partir de esos elementos primigenios que se trabajan se hacen enunciados que son los teoremas y se validan a través de la demostración. La validación no es solamente del orden epistemológico sino del orden sociológico.

Estamos interesados en analizar la manera en que ciertos procesos se han ido validando históricamente, en particular el paso de la curva a la ecuación y de la ecuación a la función, fundamentalmente en la relación con lo trascendente; algo que no era válido matemáticamente, como las curvas mecánicas a partir de una herramienta que son las series de potencias, comenzó a considerarse como algo válido y se fue incorporando en la Matemática. No obstante, dicha incorporación depende intrínsecamente de procedimientos operativos definidos y la manera en que la comunidad matemática los fue aceptando. Por ejemplo, para la solución de ecuaciones, como las de tercer grado, se obtienen en algunos casos soluciones con radicales; donde muchas de estas soluciones corresponden a números irracionales. En este proceso de solución dado por Gerolamo Cardano ($1501 - 1576$) en su obra *Ars Magna sive de Regulis algebraicis* se vislumbra la aparición inclusive de soluciones con raíces negativas, las cuales no eran consideradas como números, en cuanto a lo operativo se obtenían resultados coherentes. Este es un ejemplo mediante el cual se vislumbra la aparición de objetos que aparentemente son la solución de la ecuación, pero la comunidad matemática no posee una caracterización o una axiomática que permitiera incorporarlos.

La emergencia de este tipo de números (irracionales) comienza a generar un "nuevo" campo de estudio debido a la naturaleza de estos, en el sentido de que no se encontraban muy bien caracterizados; la inexistencia de un sistema formal no representó un motivo para desechar los números irracionales emergentes, por el contrario las comunidades matemáticas al percatarse de que los irracionales eran solución de un cúmulo de ecuaciones, los fueron incorporando en el universo matemático. En este sentido, es clave referirnos a la visualización y el estatus que proporcionaban las comunidades matemáticas a los resultados obtenidos, donde al parecer en muchos casos era suficiente que lo obtenido cumpliera determinada condición sin preguntarse acerca de la naturaleza del objeto encontrado.

En relación con lo trascendente en Matemáticas, es necesario indagar los aspectos primigenios que posibilitaron la entrada de lo trascendente. Para ello se tomará como directriz los diferentes trabajos en los cuales se distinguen estos rasgos. En este sentido se abrió un cúmulo de discusiones relacionadas con la manera de adaptar ecuaciones a cierto tipo de curvas. De hecho, Descartes creyó que era imposible adoptar ecuaciones a este tipo de curvas, a las cuales denominó mecánicas. Justamente, la respuesta a esta problemática empieza a abrirle el camino a otro tipo de representaciones, como las series infinitas y de potencias, las cuales se revelan importantes para la constitución de la noción de función. Las representaciones en series infinitas comienzan a hacerse tangibles con los trabajos de Wallis, Mercator, Newton, Leibniz, Taylor y Maclaurin a mediados del siglo XVII.

En general, aunque no existía conciencia de ello, lo trascendente en Matemáticas ha sido punto de discusión desde la antigüedad. Primigeniamente con la aparición de las magnitudes inconmensurables y la solución de problemas como la cuadratura del círculo.

En la búsqueda e indagación referente a los primeros atisbos de lo trascendente en Matemáticas, vale la pena destacar la escuela pitagórica y sus primeros pasos relacionados con lo irracional.
Los pitagóricos demuestran que la diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables. Dicha demostración se basa en la imposibilidad de encontrar dos números m y n tales que $nD = mL$.

Para los pitagóricos, la imposibilidad de comparar la longitud de la diagonal del cuadrado con uno de sus lados, representó un cambio de paradigma en su quehacer matemático. Ciertamente en este problema se encuentran las raíces históricas de los números irracionales; pero por parte de los pitagóricos no existía una conciencia de que estaban tratando con los números irracionales. Modernamente sabemos que los números irracionales se dividen en dos tipos, los algebraicos y trascendentes. Los primeros son aquellos que son raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros no todos nulos, mientras que los trascendentes son números que no son raíces de ninguna ecuación algebraica. Concretamente, esta concepción moderna, no tiene sentido para los antiguos.

En la antigüedad griega, existían muchas limitaciones relacionadas con la ausencia de un formalismo y un corpus teórico que permitiera manipular los irracionales. En este sentido en la línea de desarrollo de estos antecedentes iniciales de lo trascendente e irracional en Matemáticas, emerge una aproximación para el valor de π realizada por Arquímedes de Siracusa (287 a.C-212 a.C), donde para poder encontrar la aproximación correspondiente a π, recurre a métodos numéricos de aproximación, en particular acotando el círculo por exceso y por defecto. En Arquímedes se comienza a inaugurar el cálculo numérico mediante aproximaciones, llegando a demostrar que el círculo es equivalente a un triángulo rectángulo. Arquímedes no tiene conciencia de que el valor de π es la longitud de la circunferencia, dividida dos veces el radio, pero halla una buena aproximación que permite esclarecer un poco la naturaleza y la manera de generar dicho número.

Aparentemente lo irracional se ha venido engendrando a partir de la necesidad de resolver un cúmulo de problemas, que si bien los antiguos desecharon por falta de mecanismos teóricos, matemáticos de diferentes latitudes los abordaron y en algunos casos dieron luces respecto a la solución; las diferentes tipos de manipulaciones promovieron diferentes caminos procedimentales que ayudaron a introducir nuevas maneras y concepciones respecto a los problemas que involucraban soluciones irracionales. Sin embargo, en este trabajo nos compete analizar la incorporación de lo trascendente en relación con las curvas. Consecuentemente, nos encontramos con autores como René Descartes $(1596-1650)$, Gilles de Roverbal $(1602-1675)$, Pierre de Fermat $(1601-1665)$. Los cuales manipularon las curvas y encontraron resultados en el circuito curva-ecuación.

1.2. René Descartes y las curvas mecánicas

En la *Geometría,* René Descartes $(1596-1650)$ establece un algoritmo general para analizar problemas de construcciones geométricas. Justamente dicho algoritmo se constituye en el método a seguir para asociar ecuaciones a las curvas. Los pasos, establecidos por Descartes son los siguientes[7]:

- Asumir que el problema está resuelto.
- Nombrar las líneas y segmentos, usando caracteres del alfabeto.

[7]Tomado de [Descartes 1637, p.299]

- Traducir el problema geométrico en una o más ecuaciones donde aparezcan dichos caracteres
- Resolver la ecuación.
- Traducir la expresión algebraica de la solución en una serie de operaciones geométricas, la cual produce el segmento buscado.

Descartes estableció un procedimiento que permitía resolver problemas geométricos mediante la algebrización de los segmentos y la definición de las operaciones para los segmentos. Concretamente las operaciones para los segmentos permitieron multiplicar, dividir y extraer raíz cuadrada.

Por otra parte, Descartes se interesa por realizar una caracterización de las diferentes curvas existentes tomando como referencia principal la clasificación brindada por los antiguos. Dicha clasificación tomaba algunas curvas conocidas por los antiguos y relegaba otras debido a su naturaleza y forma de generarse.

Para Descartes, las curvas admisibles en la geometría eran aquellas que podían ser asociadas con una ecuación, es decir, aquellas que podían ser modeladas por movimientos dependientes, denominándolas curvas geométricas; mientras aquellas que podían ser modeladas por varios movimientos independientes entre sí Descartes las denominó curvas mecánicas[8]. Descartes nota que es imposible asociarles una ecuación algebraica a las curvas mecánicas; entre ellas se destacan la trisectriz y la cuadratriz, entre otras. Dicha imposibilidad dió lugar a que en la *Geometría* se clasificaran las curvas entre mecánicas y geométricas. Específicamente, en el libro II titulado *Sobre la naturaleza de las lineas curvas*[9], define explícitamente que las curvas mecánicas son aquellas que no pueden ser expresadas por una ecuación algebraica, es decir, se generan geométricamente por movimientos independientes; mientras que las geométricas son el resultado de construcciones bien sea con regla y compás o algún instrumento mecánico. Aunque Descartes clasifica las curvas dependiendo de la complejidad de su construcción, en lo que concierne a las curvas mecánicas no logra asociar ninguna ecuación que permitiera describirla. En este sentido este tipo de curvas quedan excluidas de la geometría. Podría pensarse que la clasificación de Descartes determinó un punto clave entre el quehacer matemático de la época y la forma de sistematizar las curvas conocidas por los antiguos.

La siguiente es una de las curvas excluidas por Descartes; la trisectriz de Hipias se define en términos mecánicos, puesto que es el resultado de dos movimientos independientes entre sí. De esta manera para realizar su construcción se tienen en cuenta elementos como recta y giro. En este orden, Hipias considera una recta paralela al eje horizontal que efectúa un movimiento vertical a velocidad constante y otra recta paralela al eje vertical que realiza un giro a velocidad constante (Fig 1), de modo que al iniciar el movimiento, las rectas realizan las fases 1,2,3,... etc. (Fig. 1).

[8]Tanto los griegos como Descartes excluyeron de la geometría las curvas mecánicas, en el sentido de que carecían de un aparato teórico mas sofisticado para abordarlas.

[9]Ver [Descartes 1637, p.315]

Inicialmente las rectas CB y FE se encuentran perpendiculares. En la medida que el movimiento se genera, se obtiene como resultado los pasos 2,3,... sucesivamente se nota que las rectas iniciales al final coinciden generando la curva trisectriz.

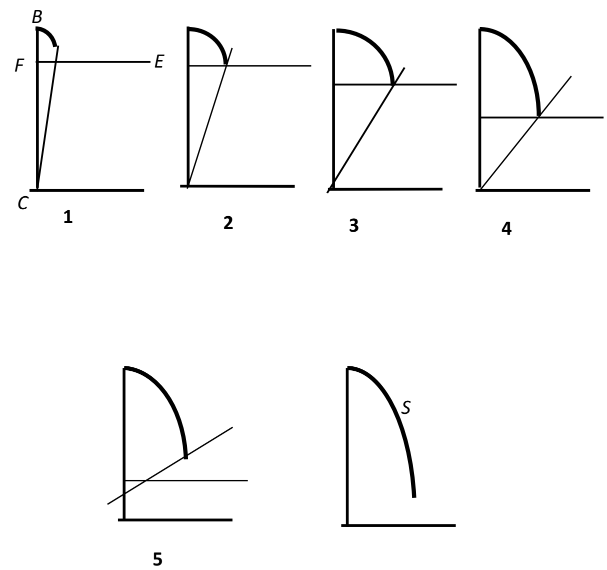


Figura 1.1: Trisectriz de Hipías

Para Descartes este tipo de curvas que son generadas por dos movimientos independientes no eran consideradas exactas, es decir no eran admisibles en la geometría, de hecho, en el tratamiento brindado en la *Geometría*, se limita simplemente a clasificarla como una curva mecánica, donde no es posible asignarle una ecuación algebraica. En general, Descartes organiza, sistematiza las curvas conocidas y conecta el álgebra con la geometría a través de la asignación de variables y la forma de asociar una curva geométrica con una ecuación algebraica.

Descartes inaugura un universo analítico donde abundan las ecuaciones de la forma $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ las cuales podían ser asociadas a problemas geométricos. No era posible asignar a toda curva una ecuación. De esta manera en la consolidación de la geometría analítica cartesiana se deben destacar los siguientes aspectos:

1. Descartes manipula las curvas geométricas y les asocia una ecuación algebraica.

2. Las curvas mecánicas las excluye de la *Geometría,* debido a la forma compleja en que son construidas.

3. La exclusión realizada por Descartes a las curvas mecánicas mostró que la geometría analítica cartesiana no era suficiente para modelar su comportamiento paramétrico.

Claramente la algebrización brindada a la geometría fue preponderante, puesto que se logró imponer un mecanismo que permitía generar ecuaciones algebraicas a las curvas geométricas, pero dicho mecanismo no fue suficiente para acogerlas a todas. Esto brindó los elementos primigenios para que Newton años después acogiera las curvas mecánicas en el *Dy Analysi*.

En general, la geometría analítica transformó el problema de las cuadraturas en el problema de hallar el área bajo la curva. La obra cartesiana tiene gran importancia en esto, puesto que representó un cambio cualitativo en relación a las curvas; por ejemplo una parábola la cual dejaba de estar amarrada a la acción de un plano que corta un cono pasa a convertirse en una ecuación. El universo de las curvas conocidas aumenta, especialmente por el reconocimiento de las llamadas curvas mecánicas, las cuales fueron posteriormente designadas como curvas trascendentes y que darían paso a las funciones del mismo nombre. A partir de esto emergen las curvas logarítmicas, las trigonométricas, las exponenciales, la cicloide y muchas otras más.

Tras la creación de la geometría analítica por parte de Descartes a comienzos del siglo XVII, los matemáticos se interesaron por cuatro problemas fundamentalmente:

1. Calcular la tangente de una curva en un punto.

2. Determinar el máximo o mínimo de una cantidad o expresión algebraica (función).

3. Conocer la posición, velocidad y aceleración de un objeto en términos del tiempo.

4. Determinar la longitud de curvas, cuadraturas y volúmenes de figuras acotadas.

Ciertamente en la época, la solución de estos 4 problemas de investigación permitirían la inauguración de nuevos métodos de investigación cualitativa y cuantitativa, en el sentido de que era necesario incorporar un aparato teórico que diera cuenta de fenómenos como el movimiento de una partícula en términos del tiempo; están emergiendo los problemas fundamentales que dieron lugar a la creación del cálculo infinitesimal. Aunque estos problemas fueron abordados por diferentes matemáticos, nos interesa analizar la forma en que fueron manipuladas las curvas mecánicas. En particular Gilles de Roberval $(1602 - 1675)$, manipuló las curvas mecánicas. Al parecer, las curvas mecánicas generaban gran interés para los matemáticos debido a la forma que eran generadas, y a la imposibilidad de encontrarles una ecuación algebraica. Roberval encuentra que la cuadratura de un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera; Roverbal no logra asociar una ecuación a una curva mecánica.

1.3. Pierre de Fermat y las curvas mecánicas

Pierre de Fermat $(1601 - 1665)$ se propone restaurar el libro de Apolonio *Lugares Planos*. Para ello incorpora un método que le permitía generar lugares geométricos, cálculo de tangentes y determinar los máximos y mínimos de algunas curvas. Principalmente, Fermat en su obra *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*, trabaja con un grupo particular de curvas conocidas. Al igual que Descartes tiene en cuenta la clasificación brindada por los antiguos para las curvas, en lugares planos y sólidos. Fermat considera las líneas, el círculo y las secciones cónicas como punto de partida. Similarmente como lo hizo Descartes, Fermat tiene en cuenta los trabajos de Euclides, Arquímedes, Diofanto y Pappus para extender y algebrizar la geometría mediante la introducción de cantidades variables.

Como primer paso fundamental Fermat busca una biyección entre las ecuaciones algebraicas y las curvas geométricas. En este sentido busca establecer que es posible amarrar una curva a una ecuación y a la vez que dicha relación es única. Fermat a diferencia de Descartes se interesa por encontrar lugares geométricos, en este sentido se vislumbra la necesidad de incorporar a la Matemática la idea de lugar geométrico considerada como aquel lugar que se obtiene y satisface alguna condición de tipo geométrico.

En el inventario de curvas algebraicas tratadas por Fermat y sus respectivas ecuaciones tenemos:

- $ax = by$ $(recta)$
- $xy = b$ $(hipérbola)$
- $x^2 \pm xy = ay^2$ $(rectas)$
- $x^2 = ay$ $(parábola)$
- $b^2 - x^2 = y^2$ $(círculo)$
- $b^2 - x^2 = ay^2$ $(elipse)$
- $b^2 + x^2 = ay^2$ $(hipérbola)$

Para Fermat era crucial mostrar que la ecuación asociada a cada curva era única, para ello utiliza en términos generales el siguiente procedimiento:

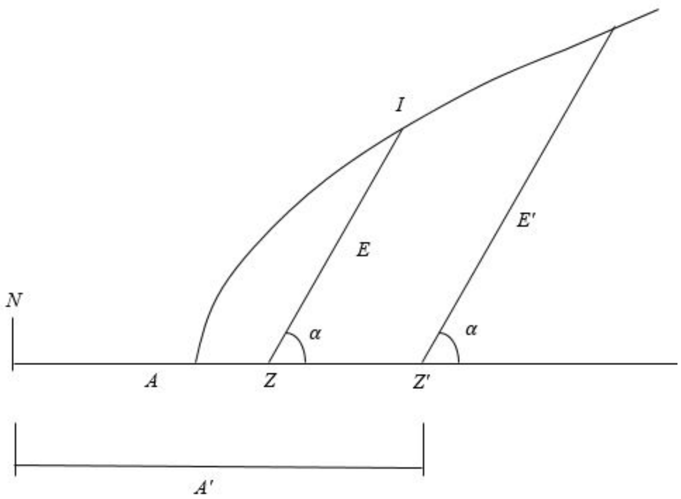


Figura 1.2: Técnica usada por Fermat

Él trabaja con ecuaciones de la forma $F(A, E) = C$, donde A y E son cantidades desconocidas y C una constante. En particular, considera a la recta $NZ = A$ dada en posición, el punto N también dado, y la recta $ZI = E$ fijada por un ángulo α , en general el sistema coordenado usado por Fermat es oblicuo determinado por el ángulo fijo α ; el segmento $NZ = A$ cambia su longitud a $NZ = A + \delta$, con $\delta > 0$. En efecto, teniendo en cuenta el cambio la posición de la recta $ZI = E$ con $\alpha = constante$ está sufre traslaciones paralelas a medida que la longitud de NZ y ZI varia; Fermat implícitamente esta incorporando el sistema coordenado mediante la variación de segmentos, particularmente tomando una línea que modernamente corresponde al eje X y al aumentar su longitud muestra cierta dependencia en el segmento que determina el eje oblicuo, modernamente el eje Y.

En este sentido compartimos la idea de [Mahoney 1994, p.82] quien menciona:

> En la geometría analítica de Fermat, las curvas emergen como lugar geométrico a partir de las diferentes posiciones tomadas por el punto I, así como la longitud variable de ZI se encuentra sobre NZ a partir de las diferentes variaciones del punto N; es decir, las curvas son generadas mas que trazadas. Hay una conexión con un sistema intuitivo de movimiento que fluyen totalmente de acuerdo con la intuición que subyace a la noción de una variable algebraica.

De esta manera, para Fermat la generación de curvas estaba ligada a la variación de los segmentos y la dependencia entre las coordenadas en el plano. En efecto, la idea básica de Fermat era demostrar que la ecuación asociada a la curva era única; en el caso de la parábola, Fermat considera las rectas NZM y el punto N dados, adicionalmente asigna las rectas $NZ = A$ y $ZI = E$ como cantidades desconocidas, tomando la segunda a partir del ángulo dado NZI tomadas en ángulos rectos (ver figura 1.3) y el punto N fijo, considera NP paralela a ZI , a partir de esto describe una parábola sobre el eje NP.

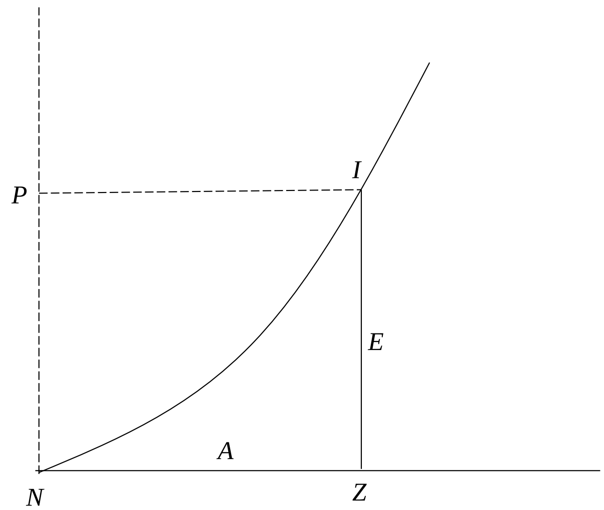


Figura 1.3: Parábola para Fermat

Aunque inicialmente Fermat trabaja con las curvas geométricas, de acuerdo a la clasificación brindada por Descartes, con el descubrimiento del método para encontrar tangentes, se propone encontrar la tangente a la cicloide, para ello considera la siguiente figura:

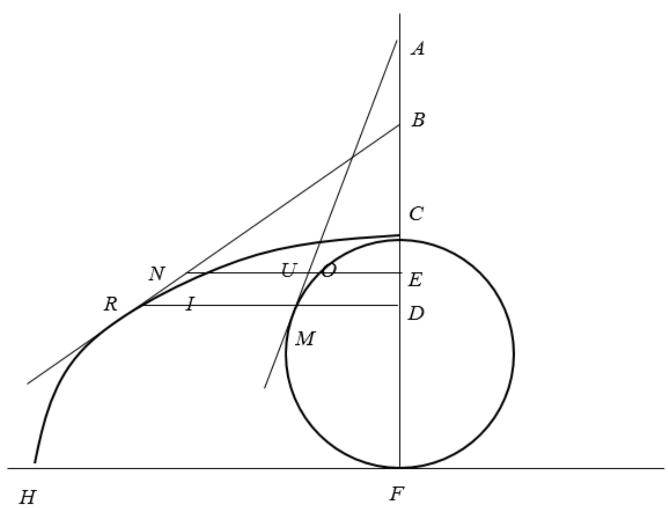


Figura 1.4: Tangente de Fermat para la cicloide

Al igual que Descartes, Fermat nombra los segmentos involucrados en el problema tomando como $DB = x$, $DA = b$, $MA = d$, $MD = r$, $RD = c$, $arc\, CM = n$ y $DE = y$. Utilizando propiedades de los triángulos encuentra que la longitud $EN = \frac{cx-cy}{x}$. Luego Fermat muestra que $EN = \frac{cx-cy}{x} \approx OE + \widehat{CO}$, con lo que de acuerdo a la figura anterior y de acuerdo a los segmentos involucrados en el problema llegar a que la recta RB esta dada por:

$$\frac{r+d}{b} = \frac{c}{x}$$

Lo novedoso del método de Fermat es que a diferencia de Descartes trabaja con curvas mecánicas, y logra extraer propiedades geométricas de las mismas, como la tangente en un punto. En este sentido, Fermat se le puede considerar como uno de los precursores de la diferenciación puesto que logra establecer un método general para hallar tangentes sobre cualquier curva; si bien Fermat no establece la ecuación algebraica de la cicloide, la manipula geométricamente. En relación con lo trascendente en la obra de Fermat, se comienza a visualizar propiedades de las curvas mecánicas, hecho que en la obra de Descartes no se evidencia.

Estos antecedentes relacionados con la manipulación y operación con curvas mecánicas las cuales fueron relegadas por Descartes, permearon que se fuera filtrando en la matemática un nuevo horizonte operativo respecto a este tipo de curvas. De esta manera, subyace en el ambiente matemático de la época el interés por los cuatro problemas mencionados en la página 29, principalmente el problema de las cuadraturas. Sin embargo, en el ambiente matemático de la época de Fermat faltaba algo, no algebraico, que estaba mas allá del conocimiento de la geometría analítica y que trascendía las operaciones de suma, multiplicación, división y radicación que comenzaba a develarse como el eslabón perdido en el universo de los objetos matemáticos y que de encontrarse daría forma y solución a muchos problemas; esto es lo trascendente, visto como ese eslabón que da cuenta de muchos problemas aparentemente sin solución, y que uno de sus elementos claves que permite su génesis son las series de potencias.

La idea de lo trascendente[10] la cual fue introducida por Gottfried Leibniz (1646-1716) en su obra *Análisis infinitesimal* [Leibniz 1684] es determinante para esclarecer su concepción al respecto. Tal como lo establece Leibniz en el *Análisis infinitesimal* [Leibniz 1684, p.20]:

> ...Por otro lado, me parece bien en este lugar, para decir algo interesante, abrir el camino de las cantidades trascendentes, ya que algunos problemas no son planos ni sólidos ni supersólidos o de grado alguno definido, sino que trascienden cualquier ecuación algebraica...

Con esta concepción, Leibniz involucra la necesidad de introducir un nueva clasificación que denomina cantidades trascendentes donde estable una distinción de curvas. La primera, las curvas algebraicas como aquellas que pueden ser representadas por una ecuación de cierto grado, mientras que las demás curvas las cuales denomina trascendentes en el sentido de [Youschkevitch 1975,

[10]Modernamente se ha categorizado en números trascendentes, funciones trascendentes y curvas trascendentes.

p.59], donde señala que las funciones trascendentes y las curvas pueden someterse a un estudio exacto y de cálculo, aunque de naturaleza diferente, a partir de su representación por ecuaciones de orden indefinido o infinito. Con esto, Leibniz admite el trabajo con curvas trascendentes, y esclarece un poco la forma de las mismas. No obstante, los cálculos en curvas como los logaritmos, exponenciales y arcos escapan del álgebra en el sentido de que las operaciones conocidas como básicas (suma, multiplicación, división, radicación), no dan cuenta de la naturaleza y valor de las mismas cantidades, pero la inexistencia de operaciones con dichas curvas, acrecienta la necesidad de buscar métodos generales para resolver el problema, bien sea para las curvas algebraicas o trascendentes. Por ejemplo la caracterización de los irracionales y la forma de determinar sus infinitas cifras decimales, fue un problema que fue resuelto por Cantor y Dedekind en 1872 con la introducción de los números reales. El mecanismo que permitió aproximarnos concretamente a las curvas trascendentes son la representación mediante series de potencias.

Lo trascendente se vislumbra en los logaritmos, arcos de círculos, exponenciales y aquellas curvas de grado indefinido o infinito. Esta distinción proporciona una dificultad explícita para poder asociarles una expresión algebraica, debido a la falta de operatividad en estas curvas. Aunque modernamente sabemos que para determinar por ejemplo el valor de e, podemos recurrir a su representación mediante series de potencias que corresponde a:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \quad x \in \mathbb{R}$$

y aproximar su valor tanto como queramos. En el siglo XVII, era imposible calcular y manipular cantidades que no eran racionales ni algebraicas y en muchos casos estas cantidades correspondían a cuadraturas de curvas. Esta imposibilidad se dió debido a que no existía un corpus numérico definido.

En términos generales, las series de potencias cautivaban a los matemáticos del siglo XVII, puesto que a partir de ellas fue posible asignar expresiones analíticas a muchas curvas que no podían ser representadas por ecuaciones algebraicas. Las series de potencias se convierten en el ingrediente para dar un tratamiento matemático similar al dado a las curvas algebraicas, a las denominadas curvas trascendentes. Más aún, con las series de potencias se logra resolver la cuadratura del círculo a partir de un método más general, que logra acoger un gran cúmulo de curvas y determinar su cuadratura.

2. CAPÍTULO 2. DE LAS SUMAS INFINITAS A LAS SERIES NUMÉRICAS

2.1. Principales representantes de las series numéricas

En este capítulo se realizará el desarrollo historiográfico relacionado con el uso de las series numéricas, su génesis y los rasgos que permitieron deducir y formalizar las nociones de convergencia. En este sentido, en la línea de desarrollo de las series numéricas, se destacan los trabajos de Nicolas Oresme (1323 – 1382), François Viète (1540 – 1603), Pietro Mengoli (1626 – 1686), John Wallis (1643 – 1689) y Gottfried Leibniz (1646 – 1716). Justamente, en la búsqueda de elementos primigenios de las series numéricas hemos considerado la siguiente categorización:

$$
\begin{tikzcd}
Series \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, "paradoja"] \arrow[dddr, bend right, "exhaustivo"'] & & & & \\
& Grecia \arrow[r] \arrow[d] & SigloXVI \arrow[r] \arrow[d] & SigloXVII-XVIII \arrow[d] & \\
& Zenon \arrow[r] \arrow[d] & Wallis \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & Leibniz-Euler \arrow[d] & \\
& Arquimedes \arrow[r] & Mengoli \arrow[r] & Newton \arrow[r] & Cauchy
\end{tikzcd}
$$

Cuadro 2.1: Relaciones de series numéricas y sus representantes

1. La antigüedad griega (Arquímedes, Zenón de Elea)
2. El siglo XVI.
3. El siglo XVII-XVIII.

En la primera categoría, nos encontramos con la paradoja de Zenón y el método exhaustivo de Arquímedes; en relación con la paradoja de Zenón, se involucra el infinito potencial mediante la aplicación de pasos finitos y la imposibilidad de que Aquiles alcance a la tortuga. Mientras que en Arquímedes se divisa una serie numérica, cuando mediante la aplicación del método exhaustivo logra encontrar que la parábola representa $\frac{4}{3}$ del triángulo inscrito en ella. En términos generales, en la antigüedad griega a causa del horror al infinito, la manipulación de expresiones numéricas infinitas, fue escasa, debido a la ausencia del paso al límite.

2.2. Paradojas del infinito; Aquiles y la tortuga

Como punto de partida para develar los aspectos primigenios de las series numéricas comenzaremos a partir de la antigüedad griega citando la paradoja de Aquiles y la tortuga enunciada por el filósofo Zenón de Elea $(490 - 430)$ a.C el cual menciona:

> Si compiten en una carrera Aquiles, el de los pies ligeros, y la Tortuga, el más lento de los animales, aquél nunca cogerá a ésta, con tal de que la Tortuga inicie la carrera con una ligera ventaja con respecto al Pélida. [11]

Esta paradoja establece que para alcanzar a la tortuga, Aquiles debe avanzar una distancia igual a la que la tortuga ha recorrido, pero mientras tanto ya la tortuga ha avanzado una distancia mayor a la que Aquiles ha recorrido; similarmente Aquiles en busca de su objetivo que es alcanzar la tortuga, recorre la nueva distancia de separación. Sin embargo, la tortuga ha avanzado una nueva distancia, por lo cual Aquiles no lograría alcanzarla; estos pasos aplicados sucesivamente nos muestran que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Intuitivamente esto contradice nuestros sentidos, puesto que en la realidad es posible alcanzar a la tortuga en una cantidad de pasos finitos y no infinitos como sucede en la paradoja.

Supongamos que la tortuga inicia la carrera, cuando Aquiles llegue a la mitad de lo que ha recorrido la tortuga, está ha avanzado la mitad de la mitad es decir la cuarta parte del camino, luego repitiendo el mismo patrón este movimiento se hace infinito. En efecto, si denotamos a S como la suma de los recorridos de Aquiles, se obtiene:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \frac{1}{2^n} \tag{2.1}$$

Lo cual modernamente corresponde a una serie geométrica. Las series numéricas aparecen inicialmente como la iteración recursiva de un proceso aparentemente finito, que da lugar a la aplicación de infinito potencial, de esta forma los primeros hallazgos de series numéricas se divisan primigeniamente en la antigüedad griega. El problema de esta paradoja está en suponer que el espacio recorrido por Aquiles para alcanzar la tortuga, es un espacio de infinitos puntos, por esta razón Aquiles no podrá pasar de un punto a otro, debido a que entre dos puntos hay infinitos puntos.

Finalmente en los siglos XVI, XVII y XVIII, los avances en series numéricas se fueron afinando, con los diferentes aportes realizados por Newton y Leibniz. Aunque el primero utiliza los resultados de Wallis para encontrar la cuadratura del círculo, es considerado como uno de los precursores del uso de las series infinitas.

Frente al devenir histórico de las series numéricas, en Cauchy se formaliza las nociones de convergencia y el paso al límite; en su *Curso de Análisis* se establecen las bases fundamentales que

[11] Tomado de [Pascua 2003, p.216]

permiten domesticar el infinito[12].

2.3. Las series numéricas en el siglo XVII

Modernamente, el tratamiento relacionado con la convergencia de las series infinitas se ha solucionado a través de la representación de una serie como una sucesión de sumas parciales. No obstante, el desarrollo histórico de esta noción se muestra como un proceso complejo y difuso en el sentido del tratamiento del infinito. Aunque se intentaba buscar un formalismo apropiado para abordar el infinito. Sin duda, las series infinitas representan un punto clave en la consolidación del tratamiento del infinito; en el siglo XVII-XVIII, fueron utilizadas para el problema de las cuadraturas, la rectificación de curvas y representaciones analíticas de expresiones como las curvas mecánicas. De esta forma, compartimos la idea de [Ferraro IV 2008, p.3] quien menciona:

> Aunque las series fueron ocasionalmente encontradas de forma temprana, es solo a partir del siglo XVII que ellas comenzaron a convertirse en un tema importante en matemáticas. Su uso principalmente fue en el contexto de problemas de cuadraturas y rectificaciones de curvas. Durante el siglo XVII, los matemáticos encontraron nuevos métodos para cuadrar líneas curvas, las cuales evitaron la dificultad del llamado método exhaustivo.

En este sentido, el método exhaustivo era considerado en el siglo XVII como un procedimiento de razonamiento riguroso, de hecho, su manipulación era compleja en el sentido de la doble reducción al absurdo. Tal como lo menciona [Ferraro IV 2008, p.4], el método exhaustivo no fue un método de encontrar o descubrir, mas bien fue un método de justificación de resultados conocidos.

En la geometría griega aparecen atisbos relacionados con el uso del método exhaustivo, el cual consistía en acotar el área de un segmento de parábola P para obtener su cuadratura. Arquímedes encontró que para cuadrar la parábola se hace necesario inscribir polígonos por defecto, de manera que el enésimo polígono inscrito pueda expresarse como una serie de la forma:

$$p_n = p_0 + \frac{1}{4}p_0 + \frac{1}{4^2}p_0 + \cdots + \frac{1}{4^n}p_0. \tag{2.2}$$

En efecto, Arquímedes sigue el siguiente proceso. Sea la parábola ABC, donde B es el vértice de la parábola. Posteriormente se inscriben triángulos como se muestra en la figura 2.1:

[12] Entendemos domesticar el infinito, como el momento en que emerge la noción formal de límite

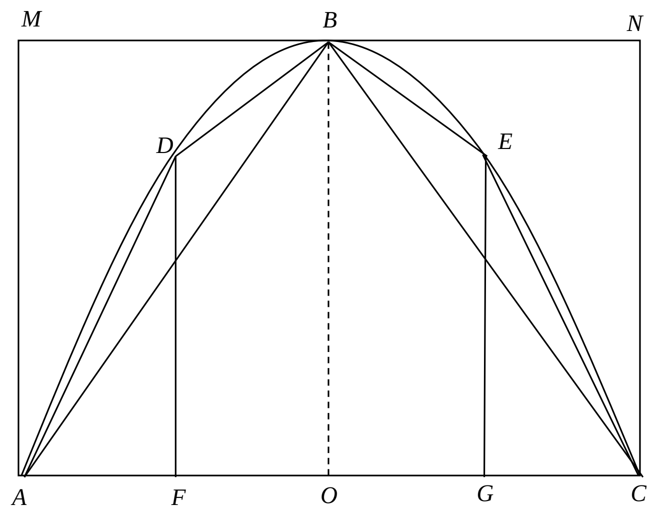


Figura 2.1: Cuadratura de la parábola por el método exhaustivo

Partimos de la siguiente secuencia: $P_0 = \triangle ABC$, $P_1 = P_0 + \triangle ADB + \triangle BCE$, y de la misma forma para $P_2, ..., P_n, ...$

Para esto, se divide AC en cuatro partes iguales y se trazan FD y GE paralelos a OB.

De las propiedades de la parábola s obtiene: $\triangle ABC = 4\left(\triangle ADB + \triangle BEC\right)$. Por lo tanto,

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{4}P_0.$$

Análogamente se demuestra que,

$$P_2 = P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0;\ P_n = P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0$$

El paso a seguir consiste en la búsqueda del límite de la sucesión de figuras inscritas. Partiendo de

$$P_n = P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_0}{4^k} = \frac{4}{3}P_0 - \frac{1}{3}\frac{P_0}{4^n}$$

el sustraendo puede ser tan pequeño como se quiera, entonces Arquímedes concluye que $S = \frac{4}{3}P_0$. De hecho, Arquímedes toma como punto de partida el siguiente resultado: $S = A+B+C+D+E$, y $A : B = B : C = C : D = D : E = 4 : 1$, entonces, concluye que $S = \frac{4}{3}P_0$. Este procedimiento usado por Arquímedes, permite sumar estos elementos y obtener una serie geométrica la cual converge; en efecto, usando series fue posible evitar el uso del método exhaustivo, permitiendo a los matemáticos encontrar un mecanismo de argumentación y validación.

En este sentido el uso de las series numéricas ha sido diverso. En el artículo *Variaran derebus mathematicis responsorum* (La variedad de la respuesta matemática) Liber VIII de Vieta (1593), se encuentran tratamientos relacionados con las series infinitas, en especial con las series geométricas; en pocas palabras las series geométricas jugaron un papel fundamental en las investigaciones primigenias realizadas acerca de series. Estos objetos fueron conocidos por Nicolás Oresme en su obra *De configurationibus*, donde establece "la convergencia" de algunas series, como $1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n+\cdots = 4$. El tratamiento de las series, en particular, de las geométricas, es utilizado para relacionarlas con eventos físicos y como sustento teórico en el caso de François Viète, en donde recurre a los *Elementos* de Euclides, concretamente al libro V, proposición 12:

Proposición 1 (Euclides V 12)**.** *Si un número cualquiera de magnitudes fueran proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así lo serán todas las antecedentes a las consecuentes.*

En términos modernos si se denota a $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ una serie geométrica, entonces

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{S_n - a_n}{S_n - a_1} \tag{2.3}$$

por tanto se obtiene que:

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1} = \frac{a_1 - a_n}{S_n - a_n}$$

Viète supone que los términos de la serie S_n decrecen, en efecto,

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1} = \frac{a_1}{S}$$

donde $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Viète considera un caso particular y calcula la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$, precisamente el resultado de esta corresponde al encontrado por Arquímedes en la cuadratura de la parábola.

2.4. Axiomas de Mengoli para el tratamiento de series numéricas

Por otra parte Pietro Mengoli (1626-1686), establece una serie de axiomas para las series numéricas. Tal como se mostrará más adelante en el trabajo de Wallis, no hay evidencia formal de convergencia y el paso al límite; para Mengoli, la idea de serie numérica esta asociada a lo geométrico. Por esta razón, si consideramos la línea de desarrollo de la teoría de series, antes de la creación del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz, nos encontramos que para Pietro Mengoli $(1625-1686)$, las series infinitas se constituían principalmente por magnitudes; a partir de esto deriva varias propiedades de las series de magnitudes. Mengoli calculó y encontró el resultado de varias sumas infinitas como $\sum \frac{1}{4^n}$; sus procedimientos operativos eran intuitivos en los cuales suponía el comportamiento inductivo de la suma infinita y encontraba su valor. No se tenía un formalismo o se referenciaba la convergencia de las series, pero se utilizaban estos resultados para encontrar sumas infinitas. Los siguientes son los axiomas que consideraba Mengoli en su obra *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum*

1. Si magnitudes infinitas tienen una extensión infinita, entonces se puede tomar un cierto número de esas magnitudes tal que excedan cualquier extensión finita.

2. Si magnitudes infinitas tienen una extensión finita y si se considera que están ordenadas y reunidas para formar otra extensión, entonces esas extensiones son iguales

En el primer axioma Mengoli hace referencia a: si la suma de una serie es infinita entonces la sucesión de sumas parciales excede a cualquier número positivo. En efecto, si se tiene que $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ y si la suma es infinita, dicha suma excede a un $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ tal que,

$$S_k > \alpha$$

Este axioma muestra que Mengoli intenta establecer una primitiva idea relacionada con la "divergencia" de una serie.

Observemos como el tratamiento brindado por Mengoli, referente a las series infinitas permitió obtener el resultado de la divergencia de la serie armónica; para ello utiliza una especie de criterio de "comparación" de los términos de la serie $\sum \frac{1}{n}$, tomando como referencia que:

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n} \tag{2.4}$$

Supongamos que,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Agrupando términos por triplas se obtiene,

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \cdots \tag{2.5}$$

Pero por la ecuación (2.4) se obtiene que,

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \cdots \tag{2.6}$$

$$> 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$= 1 + S$$

Luego se llegaría a que $S > 1 + S$, lo cual es una contradicción.

El tratamiento brindado por Mengoli a las series infinitas es mediado por lo intuitivo, en el sentido de que no utiliza un referente teórico concreto que de cuenta de la convergencia. Por otra parte la visualización, y los distintos patrones de formación de las series numéricas juegan un papel fundamental para encontrar resultados. Sin embargo, en su obra no se evidencia un formalismo que permita decidir sobre la convergencia de las series. Mengoli encuentra diferentes relaciones entre los términos de una serie, por ejemplo:

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \frac{a_4 - a_3}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n}$$

En efecto, tomando $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4, ...,$, $a_{n-1} = n$, $a_n = n+1$ Mengoli establece que,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Similarmente Mengoli obtiene algunas sumas para series infinitas como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,(2n+3)\,(2n+5)} = \frac{1}{12}$$

En esta misma línea se desarrolla el tratamiento efectuado por John Wallis (1616-1703) a las series numéricas. En su obra se muestra el aumento del universo de las series numéricas y se logra relacionarlas con el cálculo de cuadraturas; al igual que Mengoli, Wallis utiliza, manipula y obtiene resultados de manera intuitiva, en el sentido de que suponía un patrón de formación para la suma de la serie, y que dicho patrón se mantenía al infinito.

2.5. Tratamiento de Series Numéricas por Wallis

En el siglo XVI, John Wallis (1616-1703) manipula razones de series numéricas para encontrar la cuadratura del círculo. De esta manera la operatividad y el estatus matemático que brinda Wallis a estas series numéricas, es intuitivo, puesto que suponía que un resultado funcionaba para los primeros números y que mantenía esta regla al infinito[13]. En su *Aritmetica,* Wallis utiliza el

[13] Para precisar las razones de series numéricas en Wallis ver [Wallis 1656, p.13]

término “inductione” (inducción), de esta manera compartimos la idea de [Wallis 1656, p.13] quien comenta:

> Inductione, no se entiende en el sentido formal moderno de inducción matemática. Wallis usó “inducción” simplemente para significar que un patrón estaba bien establecido y que razonablemente podría suponerse que continuaba.

En Wallis hay ausencia de la noción de límite. No obstante, se puede identificar que utiliza una especie de intuición para poder visualizar los resultados y patrones de formación de las series de razones numéricas. En *Arithmetica Infinitorum*, John Wallis (1616-1703) realiza un tratado correspondiente a la cuadratura de la parábola, hipérbola y la cuadratura del círculo. En su obra proporciona un gran aparato teórico conformado por una serie de proposiciones, donde uno de los elementos conceptuales claves para encontrar dichas cuadraturas son las razones entre sumas finitas e infinitas. La obra de Wallis apunta a la introducción de los infinitesimales como una potente herramienta a la hora de calcular cuadraturas. El interés principal de Wallis va direccionado al tratamiento de las series numéricas. Concretamente en la proposición I, se presenta el uso recurrente de sumas infinitas expresadas mediante razones, todo esto con el objetivo de encontrar cuadraturas para diversas curvas entre ellas las de la forma $y = x^n$, y en el caso más general las que corresponden a un exponente fraccionario racional. Justamente entre sus resultados se destaca la siguiente proposición de su libro:

Proposición 2. *Si a_n es una sucesión natural finita con término mayor l, y b_n, donde n=0,...,l. es una sucesión constante, entonces la razón entre la suma de los términos de a_n y b_n es $\frac{1}{2}$.* [14]

Esta proposición muestra que Wallis utiliza sucesiones para comparar de manera intuitiva sus resultados a medida que los términos de la sucesión crecen, esto es:

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2}$$

Para Wallis este tratamiento numérico es inductivo, puesto que supone que para cualquier cantidad de términos que cumplan la regla de formación de las sucesiones, dicha razón es constante. En Wallis se deja entre ver una idea intuitiva e inductiva del límite, pero faltaría mucho para llegar a la formalización de la noción de límite como la conocemos modernamente.

[14] Tomado de [Wallis 1656, p.13]

Consecuentemente, Wallis generaliza los resultados presentados en la proposición anterior expresando razones numéricas de la siguiente forma:

$$\frac{0^3 + 1^3}{1^3 + 1^3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3}{2^3 + 2^3 + 2^3} = \frac{9}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3}{3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3} = \frac{36}{108} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3} = \frac{100}{320} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

Finalmente todas estas generalizaciones realizadas por Wallis sirvieron de sustento teórico para hallar cuadraturas. Aunque en realidad Wallis obtiene resultados para razones de series; no es un tratamiento propiamente de series, desarrolla un procedimiento que puede considerarse un primer paso para llegar a formalizar el tratamiento de series numéricas. Pareciera ser que la idea de convergencia de una razón de series en Wallis, esta relacionada con aumentar términos y al final suponer por inducción que el patrón sigue. El resultado, a medida que el número de términos aumenta tiende a un valor fijo. La obra de Wallis abre nuevas relaciones entre las cuadraturas y series infinitas; es como si el problema de encontrar cuadraturas cada vez fuera ampliando los métodos y teorías existentes, que a su vez desencadenan otras teorías.

Justamente uno de los resultados mas conocidos en el trabajo de Wallis es la expresión que expresa el número π en términos del cociente de un producto infinito.

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \cdots}{2 \times 4 \times 4 \cdots}$$

Para encontrar la expresión anterior fue necesario la incorporación de un método denominado "interpolación". En la obra de Wallis subyace un gran antecedente relacionado con la aplicación de un método que involucraba operaciones de cocientes con sumas numéricas infinitas. De hecho, con este tipo de resultados se comienza a vislumbrar el tránsito de lo finito a los procesos operativos infinitos, que en cierta manera permitieron la incorporación de objetos desconocidos como los números trascendentes e irracionales. Operativamente se obtenían resultados coherentes pero no existía una caracterización de dichos resultados.

Todos estos desarrollos y el uso de razones de series infinitas, permearon sin duda un cambio en la manera de representar curvas y cuadraturas a través de expresiones compuestas por infinitos términos, donde el resultado no eran más que aproximaciones que daban cuenta del objeto en cuestión. El método de interpolación de Wallis permitió que Newton generalizara y encontrara la expansión del binomio, la cual se convertiría en una potente técnica para expresar y encontrar series infinitas de la forma $a_n x^n$. Respecto al tratamiento de las series infinitas, se pueden distinguir en Wallis dos vertientes: la primera referida a la manera de encontrar expresiones infinitas de la forma $a_n x^n$ y la segunda relacionada con la manera de utilizar estas expresiones para hallar cuadraturas y representar curvas mediante expresiones analíticas.

El trabajo de Wallis influenció concretamente a Newton, Leibniz, Nicolaus Mercator $(1620-1687)$, James Gregory $(1638-1675)$ y Saint Vincent $(1584-1667)$. Uno de los principales intereses respecto a las series era la posibilidad de obtener expresiones de la forma $\frac{1}{1+x}$ en términos de una serie infinita; para ello se recurre a la división larga. El momento clave donde se logra establecer el tránsito de las series numéricas a las de potencias se da cuando se logra generalizar expresiones de la forma $f_n(x)$. Pareciera que las series numéricas representan un caso particular de las series de potencias.

En lo que se refiere al desarrollo histórico, el punto clave donde se perfila el tratamiento y formalización de las series numéricas, es cuando emerge una nueva operación denominada el paso al límite. El límite abre un campo de la matemática que es el *Análisis*, donde los insumos teóricos para este campo son los procesos infinitos y el límite se presenta como la herramienta conceptual que permite controlar lo infinito; esto dió entrada formalmente en la Matemática a las series numéricas.

2.6. Series numéricas en Logarithmotechnia

Las series de potencias fueron apareciendo con los tratamientos efectuados al realizar procesos como la división larga y cuándo se logran establecer algoritmos concretos para el cálculo de logaritmos. Por otro parte, el interés en la época era suscitado principalmente por el cálculo de cuadraturas de curvas cónicas, entre estas se destaca la hipérbola; este interés era propiciado por la forma de la curva. A raíz de esto, uno de los primeros que logra obtener la cuadratura de la hipérbola es Grégoire de Saint-Vincent $(1584-1667)$ en su obra *Opus geoermetricum.* Para Saint- Vincent, el calcular una cuadratura estaba relacionado principalmente con utilizar proporciones en ciertas porciones de la curva y demostrar que dichas porciones al final eran iguales. Aunque, su resultado no le permite conectar que el área encerrada por la hipérbola corresponde a un logaritmo; quien vislumbra dicha conexión es Alphonse Antonio de Sarasa[15] $(1618-1667)$. El momento histórico en que se relaciona el área de la hipérbola como el logaritmo, es cuando Sarasa logra establecer que $A(ab) = A(a) + A(b)$ para áreas hiperbólicas. Este tránsito comienza a vislumbrarse en la obra de Mercator. Específicamente, Nicolaus Mercator (1620-1687) en su obra *Logarithmotechnia* encuentra una de las primeras expansiones mediante una serie infinita que denota una cuadratura

[15] De acuerdo con [Burn 2001, p.1] es Alphonse Antonio de Sarasa quién logra vislumbrar la conexión entre los logaritmos y el área de la hipérbola

la cual permite relacionar el área de la hipérbola a través de un logaritmo. Este resultado fue conocido por Saint Vincent y Sarasa al establecer la cuadratura de la hipérbola. Para deducir la ecuación (2.7) lo que hace Mercator es aproximar el área de la hipérbola, $\frac{1}{1+t}$ entre 0 y x para ello divide este segmento en h partes luego el área de la hipérbola queda determinada por la suma de las ordenadas,

$$\frac{1}{1+h}, \frac{1}{1+2h}, \frac{1}{1+3h}, ..., \frac{1}{1+nh},$$

al igual que Newton, Mercator realiza la división larga obteniendo:

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+2h} = 1 - 2h + 4h^2 - 8h^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+3h} = 1 - 3h + 9h^2 - 27h^3 + \cdots$$

posteriormente al realizar la suma $\frac{1}{1+h}+\frac{1}{1+2h}+\frac{1}{1+3h}+\cdots \frac{1}{1+nh} = (1+1+1+\cdots 1)-(h+2h+3h+\cdots)+(h^2+4h^2+9h^2+\cdots)-(h^3+8h^3+27h^3+\cdots)$ y usando los resultados obtenidos por Wallis los cuales relacionan el área de expresiones de la forma x^k donde se obtiene:

$$\sum_n (na)^k = \frac{A^{k+1}}{k+1},\ k = 0, 1, 2...$$

por tanto encuentra que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

La relación entre la serie y el logaritmo se da, puesto que Gregorio de Saint Vincent había mostrado que el área de una hipérbola es un logaritmo, aunque Saint-Vincent no utilice el término logaritmo de manera explícita. Mercator halló un desarrollo en series de potencias para el logaritmo. Es Mercator en 1668, quien logra obtener la expansión para,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{2.7}$$

Esta expresión denota una serie infinita donde su valor aproximado queda determinado por x. Mercator dedica gran parte de su obra a unificar y sintetizar las reglas para el cálculo de logaritmos y el cálculo del área de la hipérbola. Para la expresión anterior el dominio no se encuentra explícitamente determinado, podría pensarse que al sustituir, por ejemplo, $x = -1$ se obtiene:

$$\log 0 = -1 - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4} + \cdots = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right),$$

la serie armónica, la cual diverge. En este sentido se comienza a evidenciar ciertas restricciones de las series respecto al dominio (modernamente llamado, intervalo de convergencia de la serie).

La manera de ver una cuadratura como el resultado que expresa cierta relación funcional amarrada a un proceso infinito, representa un punto de partida referente a la representación de ecuaciones mediante series infinitas, de hecho, la representación de curvas mediante series adquiere gran importancia al momento de acoger las curvas que Descartes relegó, las mecánicas. De este modo con la instauración de las series infinitas como herramienta, Newton logra establecer un sin número de relaciones entre lo geométrico y algebraico, particularmente el teorema del binomio.

2.7. Series numéricas en Cauchy

En el tratamiento y operatividad de las series considerabas como numéricas, Augustin Cauchy $(1789 - 1857)$ en su curso de análisis introduce un apartado denominado "Consideraciones generales sobre series" [16], precisamente en el tratamiento de las series numéricas Cauchy considera la siguiente definición:

Definición 3 (Convergencia para Cauchy[17])**.** Denominaremos una serie como una secuencia indefinida de cantidades

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

la cual se forma a partir de una ley determinada. Estas mismas cantidades son los diversos términos de la serie considerada. Sea,

$$s_n = u_0 + u_1 + u_3 + \cdots + u_{n-1},$$

la suma de los primeros n términos, donde n denota cualquier número entero. Si, para cada valor creciente de n, la suma s_n se aproxima indefinidamente a cierto límite s, la serie se denomina convergente, y el límite en cuestión es llamado la suma de la serie. En caso contrario, si la suma s_n no se aproxima a ningún límite fijo a medida que n aumenta indefinidamente, la serie es divergente y no tiene suma.

En esta definición, dada por Cauchy en 1821, se muestra la noción de suma parcial, para una

[16] Ver [Cauchy 1821, p.85]
[17] Tomado de [Cauchy 1821, p.85]

serie numérica. Históricamente esta definición enmarca un punto de quiebre con respecto a la idea de convergencia en el siglos anteriores. Por ejemplo, como lo mostraremos mas adelante Newton en su *Análisis*[18] no hace alusión explícita acerca del dominio de las series. Lo mas interesante del trabajo de Newton es que debido a la falta de rigor estableció de manera intuitiva series de potencias para expresiones trascendentes[19]. Cauchy está inaugurando un mecanismo general que permite decidir acerca de la convergencia de series numéricas. Aunque en su obra posee un cierto toque pedagógico referente al lector, por ejemplo muestra la divergencia de la serie armónica utilizando una especia de criterio de comparación para ello considera lo siguiente. Sea,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ... \tag{2.8}$$

Denotando al n-esimo termino como $\frac{1}{n+1}$ el cual decrece a medida que n aumenta; el busca mostrar su divergencia utilizado el siguiente argumento:

Si denotamos la suma de los primeros n términos de la serie (2.8) como,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1},$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right),$$

luego,

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Cabe destacar que Cauchy busca establecer una serie de reglas generales que le permitan decidir acerca de la convergencia de una serie, de hecho podemos preguntarnos, ¿cuál es la motivación principal de Cauchy para realizar esta categorización?

Al introducir una definición de límite que prefigura su tratamiento en términos de inecuaciones, se puede afirmar que los trabajos de Cauchy abren perspectivas del desarrollo de las funciones en series de potencias. A partir de Cauchy empieza a discutirse el problema de la convergencia puntal y la convergencia uniforme.

En términos generales, en la obra de Cauchy se encuentra un tratamiento sistemático y unificado de las series infinitas que da cuenta de la visualización del concepto de límite, pero más allá del compendio sistemático, se estaba inaugurando un método y un formalismo contundente el

[18]Ver [Newton II 1711]

[19]Por intuitivo nos referimos en el sentido de Wallis, el cual suponía que el patrón de formación continuaba y que cumplía al infinito una regla determinada Ver [Wallis 1656, p.13]

cual reivindicaba las ideas provenientes de los siglos anteriores referentes a las series numéricas convergentes. En este sentido compartimos la idea de [Recalde 2017, p.271] quien menciona

> La incorporación de los criterios es algo de suma importancia en la caracterización del infinito, pues implica la adopción de los procesos infinitos como operaciones en cierto sentido "regulares" en el quehacer matemático. Ya no es necesario analizar cada caso particular sino que existe un cuerpo teórico que se puede usar sin llegar a contradicciones en el proceso de sumas infinitas. Esto implica el abandono de muchos prejuicios filosóficos anteriores, pues con los criterios se adopta, operativamente, lo infinito en sumas y productos infinitos, e incluso comparando el grado de variaciones infinitas de los procesos. Además la formalización de los criterios da lugar a un rigor antes inexistente y abre las puertas hacia una axiomatización de la teoría de series.

Claramente, con la emergencia de los criterios definidos por Cauchy la teoría de series comienza a tener un cuerpo teórico que fundamenta los procesos operativos e infinitos mediados con una especie de clasificación en dos sentidos: las series convergentes y aquellas divergentes. En particular, como menciona Cauchy en su *Curso de análisis* "Una serie divergente no tiene suma".

3. CAPÍTULO 3. LAS SERIES DE POTENCIAS: UNA PUERTA DE ENTRADA A LO TRASCENDENTE

3.1. Series de potencias en Newton

A mediados del siglo XVII los desarrollos en series de potencias eran algo que asombraba y cautivaba el interés de Isaac Newton (1643-1727); principalmente porque a través de ellas era posible asignar una expresión analítica a muchas curvas que aparentemente no se podían representar a través de ecuaciones algebraicas en el sentido cartesiano. Las series de potencias permitieron dar un tratamiento matemático, similar al de las curvas algebraicas, a las llamadas curvas mecánicas. A través de las series de potencias se resuelve el problema milenario de la cuadratura del círculo a partir de un método general que supera el intuitivo procedimiento de Wallis. Específicamente, cuando comienzan a emerger las nociones del cálculo infinitesimal se abordan problemas que los antiguos griegos habían relegado tal como el cálculo del área bajo la curva, la cuadratura del círculo, el problema de la recta tangente y la noción de proximidad (límite), y en especial las curvas mecánicas excluidas por Descartes; matemáticos como Isaac Newton $(1643-1727)$, Gottfried Leibniz $(1646-1716)$ y John Wallis $(1616-1703)$ introducen una nueva herramienta que permitió acoger objetos matemáticos, que habían sido relegados como las curvas mecánicas. Aunque la aceptación de estas herramientas teóricas novedosas estuvo cargada de críticas, finalmente todo este cúmulo de conocimientos desemboca en la creación del cálculo infinitesimal.

Como primer paso de dicha aceptación Newton en su obra *El Análisis mediante ecuaciones infinitas*[20] realiza el cálculo de cuadraturas para curvas simples de la forma $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Newton considera la siguiente figura:

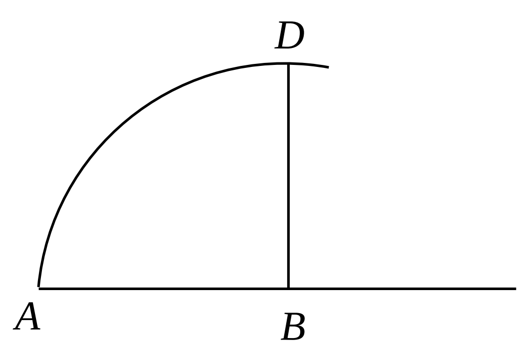


Figura 3.1: Cuadratura de curvas simples

[20]Ver [Newton II 1711] En esta obra se vislumbra el gran tratamiento asociado a las series infinitas y de potencias, asi como la generalización de los métodos para hallar cuadraturas.

y enuncia que la curva dada es AD y $AB = x$, $BD = y$ entonces,

> **Regla I.**[21] Si $y = ax^{\frac{m}{n}}$ será $\frac{an}{n+m} x^{\frac{m+n}{n}} = \acute{a}rea\, ABD$.

En el *análisis* de Newton la regla anterior es demostrada al final de dicho tratado[22].

La demostración anterior es realizada por Newton en el *Análisis,* pero antes de demostrar la proposición anterior realiza la cuadratura para la curva $y = x^{\frac{1}{2}}$. En efecto, Newton introduce las cantidades infinitamente pequeñas (infinitesimales), para poder encontrar la cuadratura de la curva $x^{\frac{1}{2}}$. De acuerdo con la figura (3.1) considera un sistema de coordenadas cartesianas donde se han asignado a los segmentos involucrados variables que dependen de la naturaleza de la curva. Newton parte de que conoce la cuadratura de curva desea cuadrar, es decir que $ABD = z = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ y lo que pretende deducir es que al derivar dicha expresión se obtenga $y = x^{\frac{1}{2}}$; en la idea de derivada en el *Análisis* de Newton es preponderante el uso de los infinitesimales, puesto que no existe una formalización del paso al límite.

Para Newton es indispensable comenzar ilustrando sus resultados con casos particulares para llegar a la generalización de los mismos; al parecer Newton pretende explicar en detalle su método, de modo que sea claro para el lector. Para ello exhibe sus resultados mediante ejemplos particulares, Newton va más allá y establece una segunda regla que permite operar cuando se tienen expresiones con varios términos de la forma $a_n x^n$.

> **Regla II.**[23] Si el valor de y se compone de varios términos de este género, compondráse el área, asimismo, de las curvas que dimanan de los términos singulares.

Al igual que el caso anterior Newton comienza brindando un ejemplo que permite ilustrar la regla, para ello consideramos necesario citar textualmente el ejemplo dado en *el Análisis*[24].

---

[21] Tomado de **[Newton II 1711, p.13]**

[22] Este teorema es demostrado por Newton en [Newton II 1711, p.55]

[23] Tomado de [Newton II 1711, p.15]

[24] Ver [Newton II 1711, p.15]

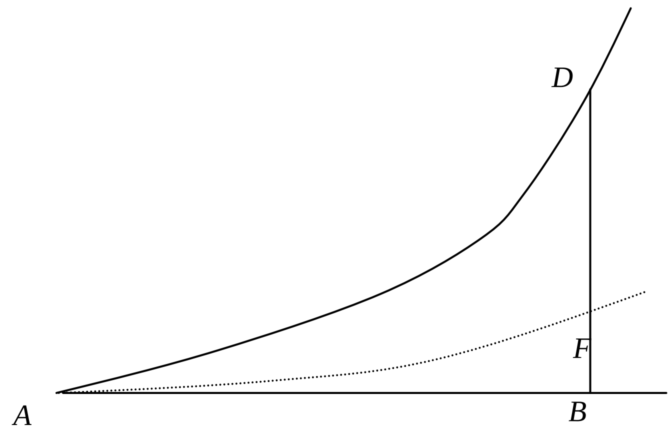


Figura 3.2: Cuadratura, a partir de las simples, de las curvas compuestas

Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$, será $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$.

Y en efecto, siempre que $x^3 = BF$ y $x^{\frac{3}{2}} = FD$, por la regla precedente será $\frac{1}{3}x^3$ =a la superficie AFD descrita por la línea BF, y $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ =a AFD, descrita por DF; razón por la cual $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ =a toda ABD.

Así, si $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$, será $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = y$, será $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$.

Y si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$, será $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - x^5 = ABD$.

En este ejemplo, Newton generaliza la operatividad de la cuadratura de curvas simples y extiende el procedimiento usado para cuando la curva está compuesta por varios términos, básicamente establece la propiedad de linealidad para las integrales, la cual modernamente corresponde a:

$$\int \alpha f + g = \alpha \int f + \int g.$$

Como se puede observar, en los procedimientos realizados por Newton no se deja entrever el tipo de funciones que cumplen la regla, al parecer considera polinomios y determina la función área como $A(x)$. Newton va mas allá y toma la ecuación de la hipérbola de la forma,

$$\frac{a^2}{b+x}$$

con miras a encontrar su área. Para poder aplicar las reglas anteriores es necesario eliminar el denominador, para ello Newton realiza la división de la siguiente manera:[25]

De acuerdo a esto la expresión que representa la hipérbola es un polinomio infinito es decir que,

[25] La notación utilizada para expresar la división larga es usado por Newton en el *Ánalisis*. Por ejemplo, el término &c indica y continua.

$$b+x)+ \qquad 0(\tfrac{a^2}{b} - \tfrac{a^2x}{b^2} + \tfrac{a^2x^2}{b^3} - \tfrac{a^2x^3}{b^4}$$

$$a^2 + \tfrac{a^2x}{b}$$

$$\overline{0 - \tfrac{a^2x}{b} + 0}$$

$$-\tfrac{a^2x}{b} - \tfrac{a^2x^2}{b^2}$$

$$\overline{0 + \tfrac{a^2x^2}{b^2} + 0}$$

$$+\tfrac{a^2x^2}{b^2} + \tfrac{a^2x^3}{b^3}$$

$$\overline{0 - \tfrac{a^2x^3}{b^3} + 0}$$

$$-\tfrac{a^2x^3}{b^3} - \tfrac{a^2x^4}{b^4}$$

$$\overline{0 + \tfrac{a^2x^4}{b^4}}$$

$$\&c.$$

Algoritmo 1: División realizada por Newton para encontrar la cuadratura de la hipérbola

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \cdots$$

pero en virtud de la regla general para hallar el área de expresiones de la forma $a_n x^n$, se integra término a término por la linealidad de la integral y se obtiene que el área de la hipérbola es:

$$\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} + \cdots$$

Claramente el proceso mostrado por Newton conduce a la aparición de un polinomio infinito. Newton no menciona las condiciones que debería cumplir la variable x para que el polinomio obtenido converja. Así la convergencia o divergencia de una serie infinita en el siglo XVII era tomada de forma intuitiva. Por otra parte en la obra de Newton es preponderante brindar una gran cantidad de ejemplos cuyo fin es pedagógico, con miras a ilustrar al lector. Hasta el momento en el *Análisis* se ha trabajado con las curvas geométricas, pero debido a la generalidad que buscaba Newton acoge las curvas mecánicas relegadas por Descartes en la *Geometría.* Es vital señalar que Newton en un apartado del *Análisis* menciona:

> Y baste lo dicho de las curvas geométricas. Y no es que, si la curva es mecánica, ello deseche nuestro método en modo alguno. [Newton II 1711, p.49]

Esta mención permite ver que el método Newtoniano para el cálculo de áreas permitía acoger y manipular las curvas mecánicas, que eran consideradas según Descartes como las que no son precisas y exactas. El proceso desarrollado por Newton se revela en forma constructiva, en el sentido de que predomina una secuencia comenzando por las propiedades particulares hasta llegar a la generalización. Justamente en dicha generalización la curva mecánica conocida como la cicloide comparece ante el método de Newton para encontrar su área. Para ello al igual que Descartes, Newton nombra los segmentos involucrados en el problema, con miras a algebrizar el problema. En *el Análisis* es crucial determinar para la cicloide la longitud de BD; claramente Newton va en busca del área de la curva mecánica, pero para poder llegar a ella necesita encontrar el polinomio infinito asociado a la curva.

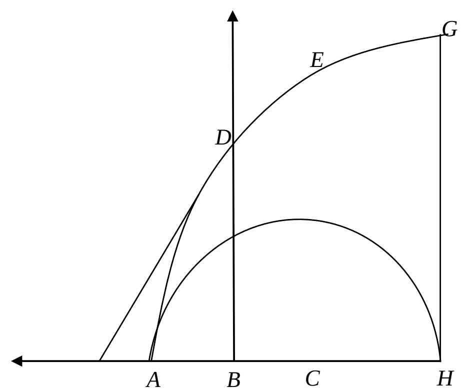


Figura 3.3: Trocoide o cicloide

De acuerdo a la figura, se asignan los segmentos como $AB = x$, $BD = y$ y $AH = 1$. Posteriormente se encuentra que,

$$BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \cdots$$

e integrando término a término se obtiene,

$$ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \cdots$$

Con el trabajo de Newton, el tratamiento, operatividad y los resultados obtenidos que dan cuenta de polinomios infinitos se comienza a vislumbrar una serie de procedimientos "novedosos" que permiten incorporar unos protocolos operativos distintos, y a su vez, la aparición de un universo de expresiones funcionales que dependen de las variables involucradas en los problemas a resolver.

El paso de la curva a la ecuación, que se evidencia en la obra de Descartes, lleva arraigado la unión de lo geométrico y lo analítico. El punto clave que permite a Newton ampliar el universo de ecuaciones y de nuevas representaciones, es el establecimiento de la serie binomial como elemento previo a la cuadratura del círculo. Justamente, Newton se pregunta por los valores intermedios que pueden adquirir las siguientes curvas (Tabla 3.1), cuando el exponente corresponde a un fraccionario irreducible, para encontrar su cuadratura.

Curvas	Cuadraturas
$(1-x^2)^0$	$z=x$
$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	
$(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$	$z=x-\frac{1}{3}x^3$
$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$	
$(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$	$z=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$
$(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$	
$(1-x^2)^{\frac{6}{2}}$	$z=x-\frac{3}{3}x^2+\frac{3}{5}x^3-\frac{1}{7}x^4$

Cuadro 3.1: Cuadraturas de algunas curvas de la forma $(1-x^2)^n$

Esta pregunta es aclarada por la interpolación que realiza Wallis. Newton en 1665 establece la famosa serie binomial en una carta enviada al Sr. Oldenburg secretario de la *Royal Society* el 13 de junio de 1676 donde menciona:

La extracción de raíces resulta sumamente abreviada por este teorema[26].

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc. \tag{3.1}$$

Donde $P+PQ$ significan que la cantidad de una raíz o una potencia, o la raíz de una potencia, puede ser hallada; P significa el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes dividido por el primero. Y $\frac{m}{n}$ el valor numérico de la potencia $P+PQ$, donde esa potencia es entera o una fracción positiva o negativa. Tomando los símbolos $A, B, C, ...$: donde $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \frac{m}{n}AQ = \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q$, $C = BQ = \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q^2$ y asi sucesivamente se encuentran las demás constantes.

La condición necesaria que $|x|<1$ para la convergencia de la serie, fue una condición que no estableció Newton, más bien fue mencionada por Wallis tal como se muestra en la Epistola prior y es establecida explícitamente por Cauchy en su curso de análisis. La influencia del trabajo de Wallis en Newton promovió la introducción de una nueva notación para el uso de potencias tanto positivas como negativas. Por ejemplo expresiones de la forma aa, aaa se escriben como a^2 y a^3, mientras que las expresiones como a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, se escriben como $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$. El descubrimiento de la serie binomial, usando el método tabular de interpolación de Wallis, proporcionó a Newton una forma de extraer raíces de manera general. Por ejemplo si se quiere calcular,

$$\sqrt{c^2+x^2} = \left(c^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De acuerdo con la ecuación (7) $P=c^2$, $Q=\frac{x^2}{c^2}$, $m=1$, $n=2$, para determinar los elementos

[26] [Newton II 1711, p.64]

necesarios de la fórmula tomemos:

$$
\begin{aligned}
&A = (c^2)^{\frac{1}{2}} = c,\\
&B = \left(\tfrac{m}{n}\right) AQ = \left(\tfrac{m}{n}\right) c \left(\tfrac{x^2}{c^2}\right) = \left(\tfrac{m}{n}\right) \tfrac{x^2}{c},\\
&C = BQ = \left(\tfrac{m}{n}\right) \tfrac{x^2}{c} \left(\tfrac{x^2}{c^2}\right) = \left(\tfrac{m}{n}\right) \tfrac{x^4}{c^3}\\
&D = CQ = \left(\tfrac{m}{n}\right) \tfrac{x^4}{c^3} \left(\tfrac{x^2}{c^2}\right) = \left(\tfrac{m}{n}\right) \tfrac{x^6}{c^5}\\
&E = DQ = \left(\tfrac{m}{n}\right) \tfrac{x^6}{c^5} \left(\tfrac{x^2}{c^2}\right) = \left(\tfrac{m}{n}\right) \tfrac{x^8}{c^7}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la ecuación (3.1) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \tfrac{1}{2}\,(c)\left(\tfrac{x^2}{c^2}\right) + \left(\tfrac{1-2}{2(2)}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{x^2}{c}\right)\left(\tfrac{x^2}{c^2}\right) + \left(\tfrac{1-2(2)}{3(2)}\right)\left(\tfrac{1-2}{2(2)}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{x^4}{c^2}\right)\left(\tfrac{x^2}{c^2}\right) + \cdots +\\
&(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \tfrac{x^2}{2c} - \tfrac{x^4}{8c^3} + \tfrac{x^6}{16c^5} + \cdots +
\end{aligned}
$$

Este procedimiento permitió obtener las raíces para expresiones de la forma $P + PQ$ con exponentes fraccionarios racionales. Newton no realiza una demostración formal del binomio. Newton realiza múltiples cuadraturas para curvas de la forma $(1-x^2)^n$, y se pregunta por el caso en que el exponente sea fraccionario. Uno de los puntos clave en los aportes de Newton, es realizar la cuadratura del círculo; la cual corresponde a los valores intermedios que no aparecen en la tabla anterior. Newton busca realizar un proceso de interpolación al estilo de Wallis. Para lo cual se apoya en el binomio que él mismo descubrió. Aquí intervienen primigeniamente unos objetos denominados series de potencias, donde a partir de la expansión del binomio y considerando la cantidad $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ que corresponde a la ecuación de un semicírculo, dicha expansión se puede escribir de la siguiente manera,

$$1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{1}{16x^6} - \ldots$$

Este resultado matemático presenta una nueva forma de obtener y amarrar series de potencias a una curva, la cual expresa una suma infinita donde su característica principal viene determinada por una progresión de la forma $1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$; a partir de allí se evidencia un cambio cualitativo y estructural en la forma de ver las ecuaciones. En otras palabras, la potencia de la técnica adquiere sentido al establecer la igualdad, es así como el binomio establece una salida conceptual al problema de las cuadraturas. Cabe señalar, que el hecho de hallar una serie infinita y amarrarla a una curva, abre paso a una de las primeras representaciones de funciones mediante series de potencias. Si bien uno de los elementos de causalidad teórica que llevaron a Newton a obtener dichas representaciones fueron las lecturas previas de Descartes, Wallis y Pascal. Luego de tener una expansión mediante series de potencias y a partir de los resultados obtenidos por Cavalieri y reafirmados por Wallis, en los cuales el área de una curva de la forma x^n queda determinada por la expresión $\frac{a^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$, Newton realiza una integración término a término de la expansión para el círculo obteniendo como resultado:

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} + \cdots$$

La representación mediante series de potencias resolvió un cúmulo de problemas como la cuadratura del círculo y la longitud de las curvas; abriendo una relación entre el problema de la cuadratura y anticuadratura. Pero Newton no sólo labora con las curvas geométricas (algebraicas) también lo hace con las mecánicas ¿cuál es su tratamiento? . En un apartado del *Análisis*, Newton realiza el tratamiento para dichas curvas, bajo el titulo "Aplicación de lo anteriormente explicado a curvas mecánicas", una de estas curvas es la trocoide o cicloide:

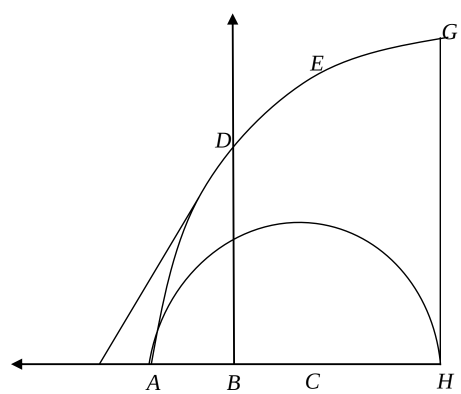


Figura 3.4: La trocoide o cicloide

Newton, al igual que Descartes, asigna un "sistema coordenado" (x, y) de forma que $AB = xy\,BD = y$, y considera un segmento unidad $AH = 1$, el propósito de Newton es encontrar la superficie ABD. Tras una serie de consideraciones relacionadas con las propiedades geométricas de la cicloide, Newton encuentra que el área de la cicloide corresponde a una serie de potencias, que es:

$$ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \ldots$$

Los métodos aplicados por Newton para las curvas mecánicas fueron utilizados para encontrar las longitudes de arco, el área bajo la curva y conocer propiedades de las curvas. Otra de las curvas mecánicas que Newton trabaja es la mencionada en el capítulo I, la cuadratriz de Hipias, al igual que para la cicloide Newton calcula el área bajo esta curva con lo que obtiene una serie de potencias. Uno de los problemas resueltos por Newton, aplicando las series de potencias es el relacionado con la reversión de series, dicho problema consistía en dada una serie de potencias de la forma $z = a_n x^n$ encontrar $x = b_n z^n$, en términos generales el procedimiento adoptado por Newton, en el caso de la expansión para el área de la hipérbola es el siguiente.

$$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \ldots$$

Newton considera cinco términos para encontrar a x en términos de z, en este caso corresponde al siguiente polinomio finito:

$$0 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - z.$$

Tras una serie de consideraciones algebraicas Newton obtiene, para la serie anterior,

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5,$$

la cual corresponde a la expansión para $e^z - 1$. Según [Newton II 1711, p.46] es la primera vez en la historia que aparece el desarrollo de la serie de potencias para la exponencial. Todos estos resultados se constituyeron indudablemente en un indicador de que el uso de las series de potencias permitía generar nuevos resultados que sustentaban los métodos para encontrar aproximaciones y calcular áreas.

Todo esto apunta a la manera de asociar series de potencias a las cuadraturas de las curvas mecánicas; entre ellas Newton se ocupa de calcular el área de la cicloide y la cuadratriz. De esta forma, dichas curvas mecánicas que fueron conocidas por los antiguos obtienen un tratamiento que involucra series de potencias. Para ello Newton se vale de las series para el seno y coseno, que fueron descubiertas por él, al aplicar el método de reversión de series.

La introducción de las series de potencias para el coseno y seno abren campo a la idea de la variación y de cierta dependencia implícita entre la ordenada y la abscisa, respecto al movimiento y variación del ángulo. Concretamente en el tratado del *método de Series y Fluxiones*, Newton introduce la idea de variación al establecer el cociente que involucra $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Siendo estas cantidades las respectivas fluxiones de x e y. Todo este desarrollo propició diferentes líneas de evolución que posibilitaron la creación del cálculo. En este sentido compartimos la idea de [Maanen 2003, p.41] quien afirma.

> "El cálculo se convierte en si mismo, solo cuando los matemáticos descubren que la diferenciación e integración son operaciones inversas".

La representación mediante series de potencias adquiere gran valor en la obra de Newton, en su Tratado de *Métodos de Series y Fluxiones*, donde dedica principalmente líneas a la expansión de ecuaciones y la reducción de divisiones de la forma $\frac{a^2}{b+x}$, obteniendo como resultado series infinitas de fracciones con numeradores y denominadores simples. Los aportes de Newton a la teoría de series fueron de gran importancia, puesto que dichos aportes dieron los primeros visos e ideas de la conexión entre las funciones trascendentes y las series de potencias. Newton en *De Analysis* no tiene en cuenta el dominio de la series.

3.1.1. Series de seno y coseno para Newton

Así como Newton establece la serie para la exponencial, también lo hace para el seno y coseno; con esto en su obra *De Analysi* da entrada a las funciones trigonométricas en el análisis, como aquellas que pueden ser representadas mediante una serie de potencias. Para encontrar la serie del seno, Newton utiliza resultados previos como el teorema del binomio para expresar cantidades como $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ en términos de un polinomio infinito, es decir que dada la expresión

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Integrando término a término se obtiene que el área de la región que va de 0 a x, $(OPQR)$ es,

$$x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \cdots$$

Por tanto de acuerdo a la figura se cumple que,

$$\acute{a}rea\,(OPQR) = (\acute{a}rea\,circular\,OQR) + (\acute{a}rea\,del\,tri\acute{a}ngulo\,OPQ) \tag{3.2}$$

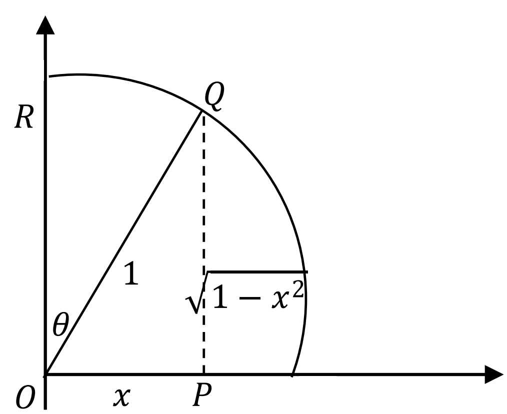


Figura 3.5: Serie de potencias para el seno

Donde, $\acute{a}rea\,(OPQR) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \cdots$

$\acute{a}rea\, circular = \frac{\theta}{2}$, θ medido en radianes y ($\acute{a}rea\, del\, tri\acute{a}ngulo$) $= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$. Sustituyendo en (3.2) se obtiene:

$$x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \cdots = \frac{\theta}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$$

al despejar θ y reemplazar $\sqrt{1-x^2}$ por la expansión en el binomio se obtiene finalmente:

$$\theta = 2\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \cdots\right) - x\sqrt{1-x^2}.$$

$$\theta = 2\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \cdots\right) - x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \cdots\right).$$

$$\theta = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

Hasta este punto, Newton obtiene la expansión para,

$$\theta = \sin^{-1} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

Luego aplicando la reversión de series obtiene,

$$\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}, \cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\theta^{2k}}{(2k)!}.$$

La aparición de las series para el seno y coseno, dieron entrada a las funciones trigonométricas en la matemática. Concretamente porque permitieron establecer la relación entre las funciones trigonométricas y el álgebra.

3.2. Series de potencias y numéricas en Leibniz

El tratamiento brindado por Gottfried Leibniz $(1646 - 1716)$ a las series infinitas, es de orden geométrico; usa series infinitas de números, para obtener resultados aritméticos. Por ejemplo, en su obra *De quadratura arithmetica,* Leibniz demuestra que para una serie geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ de términos positivos se cumple:

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i}{a_0} = \frac{a_0}{a_0 - a_1}. \tag{3.3}$$

Pero su argumento es netamente geométrico. Para ello considera una construcción mediante triángulos rectángulos de acuerdo con la siguiente figura.

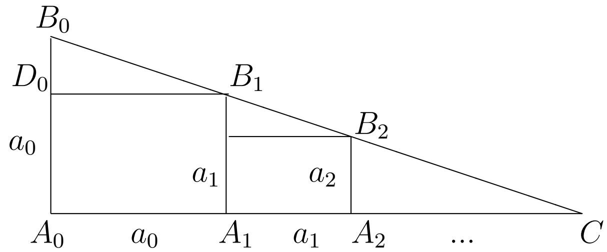


Figura 3.6: Suma de una serie geométrica para Leibniz

El argumento de Leibniz para determinar la suma de la serie geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ es considerar el segmento vertical A_0B_0 y horizontal A_0A_1 ambos de longitud a_0, posteriormente traza el segmento A_1B_1 y el segmento A_1A_2 ambos de longitud a_1; sucesivamente Leibniz construye el resto de segmentos verticales y horizontales. Lo interesante de esta construcción radica en que la longitud del segmento A_0C es igual a $a_0+a_1+a_2+a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Por construcción, los triángulos $\triangle A_0B_0C$ y $\triangle D_0B_0B_1$ son semejantes, luego por semejanza de triángulos se obtiene la siguiente, relación:

$$\frac{A_0C}{A_0B_0} = \frac{D_0B_1}{D_0B_0}. \tag{3.4}$$

Reemplazando de acuerdo a la figura: $A_0C = \sum_{i=0}^{n} a_i$, $A_0B_0 = a_0$, $D_0B_1 = a_0$ y $D_0B_0 = a_0 - a_1$. La expresión (3.4) queda:

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i}{a_0} = \frac{a_0}{a_0 - a_1}.$$

Claramente, en la obra de Leibniz se destacan manipulaciones con las series geométricas[27]. A diferencia de Newton, Leibniz se interesa por las diferencias entre secuencias numéricas; por ejemplo, él caracteriza que para una secuencia numérica $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y definidas la diferencia de sus términos como $d_i = a_i - a_{i-1}$, la suma de los d_n está dada por:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Leibniz estaba inaugurando un proceso sin duda inductivo que permitió extender y conocer otras sumas, como $1 + 2 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

[27]Recordemos que la manera de generar una serie geométrica es a partir de los términos de una progresión geométrica, es decir, $ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^n$.

También Leibniz encuentra expansiones mediante series de potencias para el seno, coseno, logaritmo y arcotangente. Leibniz es el primero en utilizar series de potencias como solución a ecuaciones diferenciales. Desarrolla un método conocido como método de los coeficientes indeterminados, el cual en términos generales consiste en tomar casos particulares, como el caso de la derivada de la expresión $y = a \log \frac{a+x}{a}$ y encontrar su serie de potencias asociada.

En el caso de la expresión anterior su derivada se puede expresar mediante una ecuación diferencial lineal de la siguiente forma:

$$a\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} - a = 0. \tag{3.5}$$

Leibniz admite que una expresión "y" se puede expresar como $y = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \cdots$,[28] debido a la notación establecida por Leibniz se obtiene,

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \cdots + \cdots \tag{3.6}$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5) Leibniz obtuvo:

$$a\left(B + 2Cx + EDx^2 + \cdots +\right) + x\left(B + 2Cx + EDx^2 + \cdots +\right) - a = 0.$$

Agrupando términos y organizando la expresión anterior toma la forma,

$$(aB - a) + (2aC + B)\,x + (3aD + 2C)\,x^2 + (4aE + 2D)\,x^3 + \cdots = 0.$$

igualando a cero cada coeficiente resulta:

$aB - a = 0$ donde $B = 1$

$2aC + B = 0$ donde $C = \frac{-1}{2a}$

$3aD + 2C = 0$ donde $D = \frac{1}{3a^2}$

$4aE + 2D = 0$ donde $E = \frac{-1}{4a^3}$.

sustituyendo queda finalmente la expansión para $y = x - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \cdots$.

De igual forma, Leibniz toma otra ecuación diferencial y encuentra la solución en términos de series de potencias. Exactamente la hipótesis principal de Leibniz para resolver ecuaciones diferenciales es suponer que la solución corresponde a una serie de potencias. En este caso si se considera una expresión de la forma,

$$a^2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

y se toma como punto de partida que la solución es de la forma $y = Bx + Cx^3 + Dx^5 + Ex^7 + \cdots$

[28]Leibniz utiliza el siguiente principio establecido en *Supplementum geometriae praticae.* Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{a_k}$ es igual a 0 para cada x en un intervalo I si solo si todos los coeficientes b_k $(k = 0, 1, ...)$son separadamente igual a cero. [Ferraro I 2007, p.42]

al calcular la segunda derivada e igualando los coeficientes a cero, se obtiene que la solución de la ecuación diferencial corresponde a:

$$y = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3a^2} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^2} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7a^2} + \cdots$$

En efecto, Leibniz encuentra series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales; esto lo realiza en *Supplementum geometriae praticae,* pero, no menciona condiciones para la convergencia de las series obtenidas.

El tratamiento relacionado con la solución de ecuaciones diferenciales, cuya solución involucra series de potencias fue un elemento determinante en lo que corresponde a la constitución de la teoría de series; con esta técnica se evidencia una de nuestras hipótesis: las series de potencias permiten ampliar y producir nuevas concepciones de resultados conocidos y desconocidos, los cuales se constituyen en un elemento que de una u otra manera permiten establecer conexiones más generales entre curvas, funciones y otros conceptos matemáticos.

Consecuentemente uno de los resultados establecidos por Leibniz, se le conoce como "criterio de Leibniz". Este resultado establece cuándo una serie alternante es convergente. Para el siglo XVII se conocían series alternantes, de hecho, Leibniz establece el siguiente criterio que le permite decidir acerca de la convergencia de las mismas. La demostración de este criterio la realiza Leibniz en una carta enviada a Johann Bernoulli el 10 de enero de 1714[29]. A continuación enunciamos el criterio de Leibniz tal como se envío a Bernoulli en el año 1714.

Teorema 4 (Fragmento de la carta enviada a Bernoulli 1714)**.** *Si lo analizas con atención, observarás fácilmente que todo valor por serie es advergente y, por lo tanto, finito, cuando las partes de la serie que decrecen son alternativamente positivas y negativas.*

Demostración. He aquí la demostración.

Sea la serie $\underbrace{\overbrace{a - b + c - d + e}^{L} - f}_{M} + g - h + i - k + etc$, cuyos términos decrecen *in infinitum*, de manera que cada uno sea menor que el inmediato anterior.

Digo 1°, que su cantidad es finita; 2° que en una porción de la serie tomada desde el comienzo y terminada por +, por ejemplo L, es mayor que la serie misma; pero 3°, que en una porción tomada también desde el comienzo y terminada por -, como M, es menor que la serie; 4°, que el error es siempre menor que el último término o que es el más próximo al último afectado por el signo -; y 5° que la serie infinita continuada es advergente *in infinitum.*

Llamemos S a la serie. En primer lugar, L será mayor que S pues de L se produce S más bien restando (o sea, f, h, k, etc) que sumando (o sea, g, i, etc) que era mi segunda afirmación. Pero M es menor que S, pues de M se produce S más bien sumando (o sea, g, i, etc) que restando (o sea,

[29] Ver [Leibniz 1693, p.899]

h, k, *etc*) que era mi tercera afirmación. Por lo tanto, S cae entre L y M, con lo que es una cantidad finita, que era mi primera afirmación. Pero el error o diferencia entre S y los extremos L y M es menor que la diferencia entre los extremos (o sea, f) según mi afirmación cuarta. Y continuando cuanto se quiera, f será menor que la dada por hipótesis, que es mi afirmación quinta. $\square$

En la demostración anterior vale la pena destacar los siguientes aspectos:

1. En la correspondencia de Leibniz a Johann Bernoulli, se utiliza el término "advergente" en dos sentidos. El primero hace referencia a que los términos corresponden a una misma serie. Mientras que el segundo lo toma como sinónimo de convergencia. Leibniz no menciona una definición explícita acerca de la advergencia de una serie. Al parecer para Leibniz una serie converge cuando tiene suma.

2. La demostración realizada por Leibniz presupone una argumentación intuitiva, puesto que parte de que la serie dada es alternante, y que sus valores consecutivos decrecen. Concretamente Leibniz demuestra que $L < S < M$. Esta demostración en gran parte retórica, muestra el estilo de probar un enunciado en el siglo XVII donde interviene implícitamente el infinito, sin hacer mención a este.

3. En contraste con la prueba de Leibniz a continuación se describe la demostración del criterio, en términos modernos.

Teorema 5. *Dada una secuencia decreciente con $a_n > 0$, si a_n tiende a 0 cuando n tiende a infinito, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

es convergente.

Demostración. Supongamos que $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ y s_n es la enésima suma parcial note que $s_{2n-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} > (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1}) + (-a_{2n} + a_{2n+1}) + (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + \cdots = S$

Análogamente para

$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n} < (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n}) + (a_{2n-1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \cdots = S$por tanto

$$s_{2n} < S < s_{2n-1}$$

$\square$

El teorema anterior le permitió a Leibniz agrupar ciertas series las cuales convergen. En el tratamiento por parte de Leibniz a las series, se encuentra con problemas de orden geométrico, los cuales requieren e involucran ecuaciones de un nivel mas complejo; si retomamos la clasificación de curvas que había dado Descartes en *la Geometría,* las curvas mecánicas fueron relegadas de la geometría, por la imposibilidad de asignarles una ecuación algebraica. Este problema de "amarrar" una ecuación algebraica a una curva mecánica, despertó diversos intereses por su solución. Entre los matemáticos interesados el mismo Leibniz en su *Análisis infinitesimal* [Leibniz 1684] menciona y critica a Descartes por haber excluido las curvas mecánicas de la geometría, Leibniz comenta lo siguiente[30].

> Y como tales problemas realmente pueden ser propuestos en geometría, deben ser considerados sin duda alguna entre los primeros, y son determinados; por esto es necesario ciertamente que estas líneas también se incluyan en la Geometría, a través de la cual tales problemas pueden construirse; y como pueden ser descritas con movimiento exacto y continuo, como es evidente en la cicloide y semejantes, realmente deben ser consideradas no mecánicas sino geométricas; siendo así que por su utilidad dejan detrás de ellas a gran distancia las líneas de la Geometría común (si se exceptúa la recta y el círculo), y tienen propiedades de momento máximo, que son capaces de demostración geométrica. Por tanto la Geometría de Descartes que las excluía fue un error no menor que el de los antiguos, que despreciaban los lugares sólidos o lineales como no geométricos.

Para Leibniz el error de Descartes radica en que las curvas mecánicas al ser entes de orden geométrico, no deberían ser excluidas de la geometría, sino entrar a una nueva categoría que él define como las curvas trascendentes. En este sentido, para Leibniz la geometría se constituye en una ciencia que acoge todas las curvas (mecánicas y geométricas), y cuyo elemento diferenciador se basa en el tratamiento que se le brinda a cada una en particular. Las curvas trascendentes para Leibniz eran entonces los logaritmos, arcos de círculo, sección general de un ángulo y otras cuestiones indefinidas mas complejas.

Por otra parte, las series de potencias se convirtieron en una herramienta novedosa, la cual acogió, y permitió hallar cuadraturas mediante expresiones algebraicas de orden infinito, a las famosas curvas mecánicas que duraron relegadas en la historia de las Matemáticas alrededor de 10 siglos. Con los trabajos mencionados anteriormente, se estaba constituyendo la teoría de series respecto a la manipulación y forma de generar series, así como los teoremas de Taylor y Maclaurin que se mencionarán en la siguiente sección.

[30] Tomado de [Leibniz 1684, p.21]

3.3. Series de potencias en Taylor

Brook Taylor$(1685 - 1731)$, matemático británico en 1715 publica en su obra *methodus incrementorum directa et inversa*[31], una fórmula la cuál modernamente se conoce como la serie de Taylor. Dicha serie permitía expresar mediante series de potencias un sin número de expresiones de forma analítica. En la proposición VII de su obra establece:

Proposición 6. [32] *Sean z y x dos cantidades variables de las cuales z crece uniformemente con incrementos dados de $\underset{\bullet}{z}$ y $n\underset{\bullet}{z} = v, v - \underset{\bullet}{z} = \grave{v}$, $\grave{v} - z = \overset{\backslash\backslash}{v}$ Entonces digo que en el momento que z se aproxima a $z + v$, x de igual manera aumentará de la siguiente manera $x + \underset{\bullet}{x}\frac{v}{1\underset{\bullet}{z}} + \underset{\bullet\bullet}{x}\frac{v\grave{v}}{1.2\underset{\bullet}{z}^2} + \underset{\bullet\bullet\bullet}{x}\frac{v\grave{v}\overset{\backslash\backslash}{v}}{1.2.3\underset{\bullet}{z}^3} + \&c.$*

$$
\begin{array}{ccccc}
x & \underset{\bullet}{x} & \underset{\bullet\bullet}{x} & \underset{\bullet\bullet\bullet}{x} & \underset{\bullet\bullet\bullet\bullet}{x} \quad \&c. \\
x + \underset{\bullet}{x} & \underset{\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet}{x} & \underset{\bullet\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet\bullet}{x} & \underset{\bullet\bullet\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet\bullet\bullet}{x} & \&c. \\
x + 2\underset{\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet}{x} & \underset{\bullet}{x} + 2\underset{\bullet\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet\bullet}{x} & \underset{\bullet\bullet}{x} + 2\underset{\bullet\bullet\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet\bullet\bullet}{x} & \&c. & \\
x + 3\underset{\bullet}{x} + 3\underset{\bullet\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet\bullet}{x} & \underset{\bullet}{x} + 3\underset{\bullet\bullet}{x} + 3\underset{\bullet\bullet\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet\bullet\bullet}{x} & \&c. & & \\
x + 4\underset{\bullet}{x} + 6\underset{\bullet\bullet}{x} + 4\underset{\bullet\bullet\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet\bullet\bullet}{x} & \&c & & &
\end{array}
$$

Cuadro 3.2: Serie de Taylor

Demostración. Los valores sucesivos de esta cantidad son reunidos por adición $x, x + \underset{\bullet}{x}, x + 2\underset{\bullet}{x} + \underset{\bullet\bullet}{x}, x + 3\underset{\bullet}{x} + 3\underset{\bullet\bullet\bullet}{x}$, *etc.*, como se muestra en la tabla. Pero los valores numéricos de los coeficientes de x, de los términos $x, \underset{\bullet}{x}, \underset{\bullet\bullet}{x}, \&c.$ están formados de la misma manera, y estos son los coeficientes correspondientes en la serie binomial. Y si el exponente de la potencia es n, los coeficientes son $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, etc. Por lo tanto a medida que z aumenta a $z + n\underset{\bullet}{z}$, que es $z + v$, x se convierte en la serie $x + \frac{n}{1}\underset{\bullet}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}\underset{\bullet\bullet}{x} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}\underset{\bullet\bullet\bullet}{x} + \&c.$ Pero $\frac{n}{1} = \left(\frac{n\underset{\bullet}{z}}{\underset{\bullet}{z}} =\right)\frac{v}{\underset{\bullet}{z}}$, $\frac{n-1}{2} = \left(\frac{n\underset{\bullet}{z} - \underset{\bullet}{z}}{2\underset{\bullet}{z}} =\right)\frac{\grave{v}}{2\underset{\bullet}{z}}$, $\frac{n-2}{3} = \left(\frac{n\underset{\bullet}{z} - 2\underset{\bullet}{z}}{3\underset{\bullet}{z}} =\right)\frac{\overset{\backslash\backslash}{v}}{3\underset{\bullet}{z}}$, &c.. Por lo tanto mientras que aumenta a z a $z + v$, x ha aumentado para convertirse en $x + \underset{\bullet}{x}\frac{v}{1\underset{\bullet}{z}} + \underset{\bullet\bullet}{x}\frac{v\grave{v}}{1.2\underset{\bullet}{z}^2} + \underset{\bullet\bullet\bullet}{x}\frac{v\grave{v}\overset{\backslash\backslash}{v}}{1.2.3\underset{\bullet}{z}^3} + \&c.$ □

En el teorema anterior la notación usada por Taylor causa confusión, sin embargo en notación moderna supongamos que $y(z)$ es una función de z, Δz y Δy son los incrementos de z e y, y

[31] Ver [Taylor 1715]

[32] Demostración tomada de [Taylor 1715, pág 37]

$v_k = k\Delta z$, entonces

$$y\left(z+n\Delta z\right)=y\left(z\right)+\Delta y\frac{v_n}{1\cdot\Delta z}+\Delta^2 y\frac{v_n v_{n-1}}{1\cdot 2\cdot\left(\Delta z\right)^2}+\Delta^3 y\frac{v_n v_{n-1} v_{n-2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\left(\Delta z\right)^3}+\cdots$$

En efecto, Taylor considera el incremento Δy como

$$\Delta y=y\left(z+\Delta z\right)-y\left(z\right) \tag{3.7}$$

Posteriormente Taylor parte de la expresión (3.7) y calcula $\Delta^2 y$ que es

$$\Delta\left(\Delta y\right)=\Delta\left(y\left(z+\Delta z\right)-y\left(z\right)\right)=\Delta g\left(x\right)=g\left(z+\Delta z\right)-g\left(z\right)$$

Donde $g\left(x\right)=y\left(z+\Delta z\right)-y\left(z\right)$. A partir de esto obtiene que

$$\Delta^2 y=g\left(z+\Delta z\right)-g\left(z\right)=\left(y\left(z+2\Delta z\right)-y\left(z+\Delta z\right)\right)-\left(y\left(z+\Delta z\right)-y\left(z\right)\right)=y\left(z+2\Delta z\right)-2y\left(z+\Delta z\right)+y\left(z\right.$$

es decir que

$$y\left(z+\Delta z\right)=y\left(z\right)+\Delta y$$

$$y\left(z+2\Delta z\right)=-y\left(z\right)+2y\left(z+\Delta z\right)+\Delta^2 y=-y\left(z\right)+2\left(y\left(z\right)+\Delta y\right)+\Delta^2 y=y\left(z\right)+\Delta y+\Delta^2 y$$

Realizando el proceso anterior recursivamente, se obtiene:

$y\left(z\right)=y\left(z\right)$
$y\left(z+\Delta z\right)=y\left(z\right)+\Delta y$
$y\left(z+2\Delta z\right)=y\left(z\right)+2\Delta y+\Delta^2 y$
$y\left(z+3\Delta z\right)=y\left(z\right)+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y$
$y\left(z+4\Delta z\right)=y\left(z\right)+4\Delta y+6\Delta^2 y+4\Delta^3 y+\Delta^4 y$
$\vdots$

Taylor observa que las expresiones anteriores tienen los coeficientes del binomio de Newton, en este sentido, extiende el resultado y lo expresa de la siguiente manera:

$$y\left(z+n\Delta z\right)=y\left(z\right)+\frac{n}{1}\Delta y+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}\Delta^2 y+\cdots+\frac{n\left(n-1\right)\cdots 1}{n!}\Delta^n y \tag{3.8}$$

El Teorema de Taylor como lo conocemos modernamente, es el resultado mostrado en el colorario 2[33]. Concretamente Taylor considera $\Delta z = \dot{z}(t)\, o$, donde o es un incremento evanescente del *método de incrementos* el cual enuncia lo siguiente:

Corolario 7. *Si se sustituye para los incrementos evanescentes las fluxiones proporcionales a ellos, y si los* $\grave{v}, \grave{\grave{v}}$ *son iguales, al igual que* z*, entonces* $z + v$ *se convertirá en*

$$x + \dot{x}\frac{v}{1 \cdot \dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1 \cdot 2 \cdot \dot{z}} + \dddot{x}\frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot \dddot{z}^3} + \cdots$$

La importancia de este resultado para Taylor, radica que puede expresar una cantidad mediante una expresión con infinitos términos, por esta razón Taylor proporciona el siguiente ejemplo de aplicación; toma como la expresión

$$xy'' + nyy'' - y' - (y')^2 = 0$$

Al despejar y'' se obtiene $y'' = \frac{y' + (y')^2}{x+ny}$. Al continuar con la derivación sucesiva se obtiene:
$y''' = (2-n)\frac{y'y''}{x+ny}$
$y^{(4)} = (3-2n)\frac{y'y^{(3)}}{x+ny}$
$y^{(5)} = (4-3n)\frac{y'y^{(4)}}{x+ny}$
$\vdots$
$y^{(k)} = ((k-1)-(k-2)\,n)\frac{y'y^{(k-1)}}{x+ny}$
Tomando $c = y(a)$ y $c' = y'(a)$, se obtiene[34]

$$y(a+x) = y(a) + y'(a)\,x + y''(a)\frac{x^2}{2} + y'''(a)\frac{x^3}{3} + \cdots$$

El aporte de Taylor junto al emergente cálculo infinitesimal, permitió fortalecer la manera de expresar y acoger una gran cantidad de funciones mediante expansión de series de potencias; lo novedoso del método de Taylor, es que permitía encontrar una serie de potencias alrededor de un punto, lo cual ayudaba a mejorar la precisión de los cálculos.

3.4. Serie de Maclaurin

Colin Maclaurin $(1698-1746)$ alumno directo de Newton deduce una expresión similar a la encontrada por Taylor en su *Tratado de fluxiones* la cual menciona como un teorema de gran uso en la doctrina emergente del cálculo.

Teorema 8 (Teorema de Maclaurin[35])**.** *Suponga que* y *es cualquier cantidad que puede ser ex-*

[33] Ver [Taylor 1715, p.38]
[34] Para entrar en detalle ver [Taylor 1715, p.39]
[35] Tomado de [Maclaurin 1801, p.198]

presada por una serie de la forma $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c$, *donde* $A, B, C, \&c$. *representan coeficientes invariables como de costumbre, y cualquiera puede desvanecerse. Cuando* z *se desvanece, sea* E *el valor de* y, *y sea* $\dot{E}, \ddot{E}, \dddot{E}$, *&c. los respectivos valores de* $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, *&c. Entonces* $y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1\times 2\dot{z}} + \frac{\dddot{E}z^3}{1\times 2\times 3\dot{z}^3} + \frac{\ddddot{E}}{1\times 2\times 3\times 4\dot{z}^4} + \&c.$

Demostración. Como $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c$. Si $z = o$, entonces $y = A$; pero por suposición E es igual a y; consecuentemente $A = E$. Tomando las fluxiones y dividiendo por $\dot{z}$ se obtiene que $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = B + 2Cz + 3Dz^2 + \&c$. y cuando $z = o$ entonces $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = B = \frac{\dot{E}}{\dot{z}}$. Tomando las fluxiones de nuevo, y dividiendo por $\dot{z}$ se obtiene $\frac{\ddot{y}}{\dot{z}^2} = 2C + 6Dz + \&c$.Si $z = o$ se obtiene que $C = \frac{\ddot{E}}{2\dot{z}^2}$. Pero tomando de nuevo las fluxiones, y dividiendo por $\dot{z}$, $\frac{\dddot{y}}{\dot{z}^3} = 6D + \&c$. y suponiendo que $z = o$, tenemos que $D = \frac{\dddot{E}}{6\dot{z}^3}$, así aparece que $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1\times 2\dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1\times 2\times 3z^{\bullet 3}} + \frac{\ddddot{E}z^4}{1\times 3\times 4\dot{z}^4} + \&c.$

Sea BD, (ver figura) la ordenada de la figura FDM en B, igual a E, $BP = z$, $PM = y$, y esta serie servirá para resolver el valor de PM, o y, en una serie. Este teorema fue dado por Dr Taylor, *en methodus incrementus. Suponiendo que la fluxión de* z *sea representada por* BP , $\dot{z} = z$, *tenemos que* $y = E + \dot{E} + \frac{\ddot{E}}{2} + \frac{\dddot{E}}{6} + \frac{\ddddot{E}}{24} + \cdots$

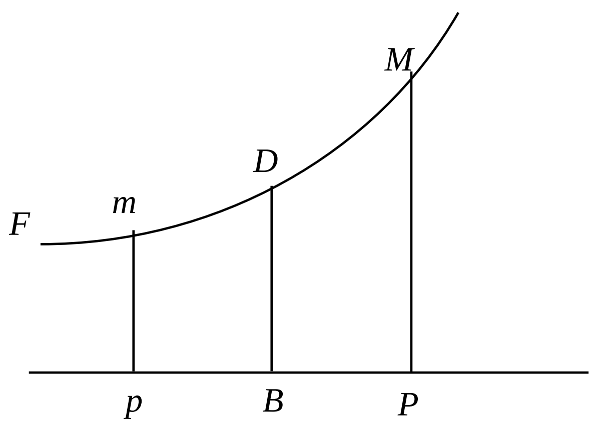


Figura 3.7: Serie de Maclaurin

□

Maclaurin, en la deducción de la expresión anterior, a diferencia de Taylor, parte del supuesto que y es una cantidad que puede ser expresada mediante una serie de potencias en la variable z, precisamente en esta consideración se deja entrever el hecho de que es posible asociar una serie de potencias a una cantidad. De esta manera la relación entre cantidades variables y las series, inaugura un algoritmo general para amarrar expresiones mediante polinomios infinitos, que si bien amplían el universo de los objetos matemáticos, inicialmente no daban cuenta aparente del dominio de las variables. La idea fundamental de la serie de Maclaurin es el uso de los infinitesimales o cantidades evanescentes en el sentido de Newton. Aunque modernamente, el uso de las cantidades evanescentes que desaparecen a conveniencia presenta ciertos inconvenientes, esto debido a la rigurosidad, y a la ausencia del paso al límite.

Por otra parte, el resultado anterior se convierte en si mismo en una nueva forma de representar expresiones de cantidades variables, aunque vale la pena preguntarse, ¿que tipo de expresiones son representables para Maclaurin?

Exactamente, en el tratado de fluxiones Maclaurin se proporcionan algunos ejemplos de aquellas expresiones que son representables utilizando la serie encontrada. La relación con la convergencia de la serie no se hace explícita, no obstante el interés de los matemáticos contemporáneos con Maclaurin radica en hallar expresiones mediante polinomios infinitos.

3.5. Series de potencias y trigonométricas en Euler

El recurrente uso de las series de potencias, a partir de la obra de Newton, inauguró, de cierta forma, un estilo y abrió un cúmulo de posibilidades relacionadas con el uso de las series. Leonhard Euler (1707-1783), utiliza series de potencias y series trigonométricas. Estas últimas fueron ampliamente tratadas en el siglo XVIII con estudios relacionados con problemas físicos, y constituyeron un punto de entrada para estas series que comienzan a encontrar apoyo en las matemáticas y los procesos infinitos. En algunos casos estos fenómenos se encontraban asociados con fenómenos periódicos que requirieron de algoritmos y expresiones especiales que dieran cuenta del fenómeno. Ciertamente en esta identificación las expresiones trigonométricas adquirieron gran importancia puesto que su comportamiento era periódico como el seno y coseno. Euler estudia estas series al preguntarse por el movimiento de las órbitas de Saturno y Júpiter. Este problema de orden físico requería la solución de una ecuación diferencial cuyo resultado dependía de una expresión de la forma

$$(1 - g\cos\omega)^{-\mu}. \tag{3.9}$$

Esta expresión admite expansión mediante el binomio de Newton de la forma

$$1 + \mu g\cos\omega + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}g^2\cos^2\omega + \cdots$$

Exactamente Euler investigó expresiones como (3.9) y estableció que debería tener una expansión de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos i\omega.$$

La investigación de Euler relacionada con las series trigonométricas permitió establecer resultados como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

cuya solución es una expresión de la forma

$$y = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sin 2i\pi x + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \left(\cos 2i\pi x - 1\right).$$

Justamente los trabajos de Euler permitieron la manipulación con series trigonométricas.

3.6. Inducción Euleriana

La inducción Euleriana es el método que descubrió Euler, y fue nombrado así en el siglo XVIII por Abel. A modo de ejemplo, lo que intenta Euler es dar solución a un problema planteado por Jakob Bernoulli, el cual consistía en encontrar la suma de,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots \tag{3.10}$$

En efecto Euler en el capítulo X de su *Introductio a l´analyse infinitesimale* [Euler 1748] toma en consideración la función,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - + \cdots \tag{3.11}$$

Euler reconoce la expresión (3.11) como un polinomio infinito, De hecho la clave de la inducción Euleriana, consiste en expresar la función $f(x)$ como un producto de factores lineales con las raíces o ceros apropiados. En este sentido, la expresión (3.11) queda escrita como,

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right)\cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{3.12}$$

Igualando (3.11) y (3.12), multiplicando el producto de dos en dos obtenemos la expresión (3.13),

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{3.13}$$

Al distribuir completamente el producto del miembro derecho, e igualando los coeficientes se obtiene,

$$-\frac{1}{3!}=-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+...\right)=-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...\right).$$

En general, Leonhard Euler encuentra una relación entre los coeficientes del polinomio infinito y sus raíces, expresados mediante una serie infinita. Los trabajos de Taylor ya eran conocidos, pero Euler utiliza libremente la expansión en series de potencias para seno, es decir que,

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

El resultado anterior muestra la forma mediante la cual el uso de resultados que involucran series de potencias, posibilitó el hallazgo de la suma infinita propuesta en la expresión en términos de un número trascendente; es en este tipo de conexiones numéricas y algebraicas donde se puede vislumbrar y establecer que las series de potencias representan un elemento clave a la hora de encontrar nuevas representaciones que a su vez nos permiten enfatizar que las series infinitas constituyeron la herramienta conceptual mediante la cual se le dio estatuto matemático a lo trascendente. Para Euler era crucial generalizar el resultado anterior a expresiones infinitas de la forma,

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$$

Suponiendo que n sea par, Euler obtiene las siguientes series numéricas y sus respectivas sumas:

1. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{2^0}{1\cdot2\cdot3}\frac{1}{1}\pi^2=\frac{\pi^2}{6}$
2. $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{2^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\frac{1}{3}\pi^4=\frac{\pi^4}{90}$
3. $1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{2^4}{1\cdot2\cdot3\cdots7}\frac{1}{3}\pi^6=\frac{\pi^6}{945}$
4. $1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\cdots=\frac{2^6}{1\cdot2\cdot3\cdots9}\frac{1}{1}\pi^8=\frac{\pi^8}{9450}$
5. $1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\cdots=\frac{2^{18}}{1\cdot2\cdot3\cdots21}\frac{1}{}\pi^{20}.$

En general, para Euler llegar a los valores de las sumas infinitas, utiliza el "teorema fundamental del álgebra" el cual modernamente establece que toda expresión polinómica de grado n tiene n raíces. Este resultado no poseía una demostración formal definitiva hasta que fue demostrado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en el año 1799; mientras que en la *Introduction a l´analyse infinitesimale* de Euler fue publicada en 1748, es decir que Euler utilizó el TFA 51 años antes de su demostración. Consideramos que Euler conocía el teorema de manera informal.

En particular en el siglo XVII, los matemáticos usaban resultados que aunque no estaban establecidos de manera formal, se suponía que funcionaban y a partir de estos se llega a nuevos resultados.

Euler encuentra una expresión para la exponencial de la forma a^x. Modernamente, se define a^x como (donde k depende de a).

$$a^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kx}{n}\right)^n,$$

es decir que $a^x = \left(1+\frac{kx}{N}\right)^N$ para N suficientemente grande y considerando la expansión mediante el binomio de Newton y el hecho de que,

$$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \frac{N-3}{N} = ..., \text{ para } N \text{ suficientemente grande} \tag{3.14}$$

En efecto, se obtiene que,

$$a^x = 1 + N\frac{\left(\frac{kx}{N}\right)}{1!} + N\left(N-1\right)\frac{\left(\frac{kx}{N}\right)^2}{2!} + N\left(N-1\right)\left(N-2\right)\frac{\left(\frac{kx}{N}\right)^3}{3!} + \cdots$$

luego, por la condición 3.14y tras simplificar la expresión toma la forma,

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots,$$

donde tomando $k=1$ y $x=1$ queda el número e introducido por Euler. El resultado anterior permitió el calculo del valor para e.

3.7. Representación mediante series de potencias de Johann Bernoulli

La representación mediante series de potencias se convierte en un procedimiento que permite llevar expresiones del alta complejidad a polinomios infinitos. En una carta enviada en 1694 de Johann Bernoulli (1667-1748) a Leibniz, le comunica el descubrimiento de la siguiente expansión:

$$\int ndz = nz - \frac{z^2dn}{2!dz} + \frac{z^3d^2n}{3!dz^2} + \cdots \tag{3.15}$$

la cual relaciona la antiderivada de una cantidad n que depende de z. Este resultado es similar a la serie encontrada por Taylor. La manera cómo lo deduce Bernoulli requiere de cierto artificio matemático, es decir, Bernoulli procede de la siguiente manera:

$$ndz = ndz + (zdn - zdn) + \left(-\frac{z^2d^2n}{2!dz^2} + \frac{z^2d^2n}{2!dz^2}\right) + \left(\frac{z^3d^3n}{3!dz^3} - \frac{z^3d^3n}{3!dz^3}\right) + \cdots$$

integrando y agrupando la expresión anterior se obtiene,

$$\int ndz = \int (ndz + zdn) - \int \left(zdn + \frac{z^2 d^2 n}{2! dz^2} \right) + \int \left(\frac{z^2 d^2 n}{2! dz^2} + \frac{z^3 d^3 n}{3! dz^3} \right) -$$

$$= \int d(nz) - \int d\left(\frac{z^2 dn}{2! dz} \right) + \int d\left(\frac{z^3 d^2 n}{3! dz^2} \right) + \cdots$$

$$= nz - \frac{z^2 dn}{dz} + \frac{z^3 d^2 n}{3! dz^2} + \cdots$$

De acuerdo a al resultado obtenido por Johann Bernoulli, y en relación con la investigación realizada en este trabajo hemos encontrado una manera diferente para obtener la expansión (3.15). En el artículo *A generalization of integrals by the formula of integration by parts* [Mendoza II 2013] se encuentra una expansión equivalente a la encontrada por Bernoulli; se parte de la fórmula de integración por partes la cual puede ser obtenida a partir de la derivación del producto: $\frac{d}{dx}\big(u(x)\,v(x)\big) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$. Por inspección sabemos que la primitiva de $u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$ corresponde a $u(x)\,v(x)$. Integrando y usando la notación de Leibniz se obtiene que,

$$uv = \int vdu + \int udv,$$

la cual a menudo se escribe como,

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{3.16}$$

posteriormente si se considera la expresión $\int f(x)\,dx$ que para Bernoulli equivale a $\int ndz$ y se le aplica iteradamente la fórmula (3.16) se obtiene lo siguiente:

$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$

$\int f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{2!}f'(x) + \int \frac{x^2}{2!}f''(x)\,dx$

$\int f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{2!}f'(x) + \frac{x^3}{3!}f''(x) - \frac{x^4}{4!}f'''(x) + \int \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(x)\,dx$

$\int f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{2!}f'(x) + \frac{x^3}{3!}f''(x) - \frac{x^4}{4!}f'''(x) + \frac{x^5}{5!}f^{(4)}(x) - \int \frac{x^5}{5!}f^{(5)}(x)\,dx.$

Continuando con este proceso se obtiene el siguiente patrón que puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\int f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{j+1} f^{(j)}(x)}{(j+1)!} + \int \frac{(-1)^n x^{n+1} f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} dx.$$

De acuerdo al resultado obtenido encontramos una antiderivada en términos de una serie de potencias, la cual corresponde a la expansión (3.15).

Bernoulli ejemplifica el uso de la expansión (3.15) considerando $y = a \log \frac{a+x}{a}$ y tomando dy como $\frac{adx}{a+x}$. Bernoulli denota a $n = \frac{1}{a+x}$ y $dz = dx$.

Al sustituir en la expresión (3.15) se obtiene:

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2\left(a+x\right)^2} + \frac{x^3}{3\left(a+x\right)^3} + \cdots$$

Para Bernoulli la expansión anterior lleva implícito la existencia de la enésima derivada, como pre- requisito fundamental para obtener la representación mediante series de potencias. A diferencia de Taylor, Bernoulli presenta limitaciones para expandir expresiones como $f\left(x\right) = e^{x^2}$, debido al desconocimiento de $f^{(n)}\left(x\right)$. De hecho, el conjunto de funciones que satisfacen la expansión de Bernoulli es poco y en la mayoría de los casos los cálculos se vuelven muy complejos.

Así mismo, para funciones que pertenecen a la clase C^{∞}, como $f\left(x\right) = e^{ax}$ con a constante, donde $f^{(n)}\left(x\right) = a^n e^{ax}$ se obtendría:

$$\int e^{ax}dx = xe^{ax} - \frac{x^2}{2!}\left(ae^{ax}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(a^2e^{ax}\right) - \frac{x^4}{4!}\left(a^3e^{ax}\right) + \cdots \frac{x^n}{n!}\left(a^ne^{ax}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^i\left(a^ie^{ax}\right)x^i}{i!} + C.$$

Claramente la serie anterior es convergente para todo x en su dominio. De hecho, hemos hallado un contra ejemplo donde se obtiene una serie divergente. Si se toma $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$, donde $f^{(n)}\left(x\right) = \left(-1\right)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ y se sustituye en la formula obtenida por Bernoulli se obtiene en el miembro derecho,

$$x\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{2!}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{2}{x^3}\right) - \frac{x^4}{4!}\left(\frac{-6}{x^4}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

La cual es una serie divergente. Con esto mostramos que la expansión daba por Bernoulli es limitada en el sentido operativo; Bernoulli en su carta no proporciona explícitamente algún contra ejemplo que la refute.

4. CAPÍTULO 4. CONVERGENCIA PUNTUAL Y UNIFORME EN SERIES DE FUNCIONES

4.1. Series de potencias en el siglo XVIII

En la génesis de la teoría de series, la idea de convergencia fue basada en una etapa intuitiva. Exactamente debido a la falta de claridad respecto a la convergencia compartimos la concepción que se tenía en el siglo XVIII de la misma:

> En el siglo XVIII, para referirse a una serie $\sum a_n$ como convergente usualmente significaba que una secuencia (finita o infinita) $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ de los términos de la serie dada tiendan a cero.[Ferraro I 2007, p.64]

Claramente, esta idea no acoge casos puntuales como la serie armónica. Los desarrollos en teorías de series abarcaron una gran cantidad de representaciones de funciones las cuales no eran representables mediante expresiones algebraicas en el sentido de Descartes. Las series de potencias representan el eslabón perdido de la matemática respecto a la representación de expresiones complejas, que si bien permitió esclarecer aproximaciones numéricas con un nivel de precisión deseado.

Por otra parte, igualdades como (4.1)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \tag{4.1}$$

denominadas series de funciones, fueron constituidas inicialmente por series de potencias de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ o $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$. A partir de 1740 la teoría de series comienza a incorporar las series trigonométricas. La teoría de series primigeniamente se conforma en una teoría de series de potencias, pero con la aparición de problemas como el de la cuerda vibrante y la conducción del calor, se fue dando entrada a otro tipo de series. Evidentemente el tratamiento de lo infinito, en especial con las series, fue dado porque los matemáticos extendían propiedades que se cumplían para el caso finito, un ejemplo de esto se mostró en el capítulo 2, con los trabajos de Wallis.

De acuerdo al recorrido histórico presentado en los capítulos anteriores la idea de convergencia inicialmente era "intuitiva", en el sentido, de que se manipulaban las series y se llegaban a resultados coherentes, sin embargo no existía una herramienta eficaz que permitiera generalizar y empaquetar aquellas que no convergían. En efecto, esta herramienta contundente que se encontraba en desarrollo fue el paso al límite, y la domesticación del infinito.

4.2. El surgimiento del concepto de convergencia

La representación de las curvas a través de series de potencias se constituyó en un elemento contundente a la hora de modelar aquellas curvas que en principio habían sido relegadas por Descartes. De hecho, las curvas que podían ser representadas mediante series de potencias las hemos clasificado de la siguiente manera:

- La representación de ecuaciones algebraicas.
- La representación de expresiones logarítmicas y exponenciales.
- En el caso de una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si $x = b$ constante, se obtiene una serie numérica.

El nacimiento del concepto de convergencia comienza a dar luces en la obra *Teoría analítica del calor* (1822). Joseph Fourier estudia la manera en que el calor se propaga en la naturaleza, pretendiendo develar las leyes matemáticas que se encuentran involucradas en este fenómeno. Por otra parte en el siglo XIX tras la creación del *Análisis* como rama independiente de la Matemática las funciones son el insumo principal para la operatividad. Aunque no eran consideradas como la relación entre dos conjuntos (como se considera modernamente), eran tomadas como aquellas expresiones conformadas por un número finito de funciones elementales[36]

La segunda vertiente de esta clasificación corresponde a las series trigonométricas, debido a su importancia en la solución y modelación de problemas físicos en el siglo XVIII; dentro de estas se enmarcan las series de Fourier.

4.2.1. La conducción del calor y el cálculo algebraico en el siglo XVIII

Con el surgimiento del Cálculo por parte de Newton y Leibniz se amplió el horizonte matemático. En el siglo XVIII se suscitan varios problemas relacionados con la Física- Matemática. Algunos de estos son el problema de la cuerda vibrante y la conducción del calor. Exactamente estos problemas comienzan a generar discusiones en torno a la manera de encontrar una expresión que permitiera modelar estos fenómenos físicos. Es decir, el primer problema plantea que dada una cuerda que oscila, encontrar la posición en algún instante t y posición x. Mientras que para la conducción del calor se buscaba determinar la temperatura en cada punto de un cuerpo en un instante dado.

La solución del problema de la cuerda vibrante implicaba la solución de una ecuación diferencial de segundo orden. A continuación, describimos la solución a este problema.

De acuerdo a la figura consideremos un pedacito de cuerda con longitud Δx.

[36]Las funciones elementales como lo menciona [Ferraro II 2003, p.19] hacen referencia a operaciones algebraicas, logaritmos, exponenciales y trigonométricas

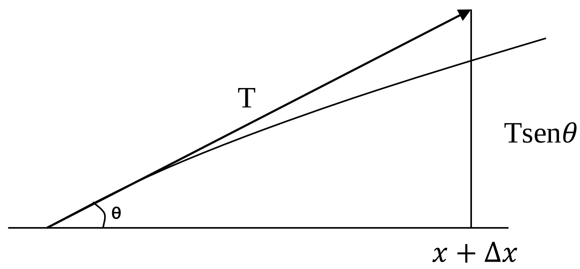


Figura 4.1: La cuerda vibrante

y por la segunda ley de Newton se obtiene:

$$F = m\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{4.2}$$

Debido a la tensión de la cuerda $\mathrm{T} = \mathrm{T}(x)$ en cualquier punto está es dirigida a lo largo de la tangente cuya componente en y es Tsenθ. Las siguientes consideraciones son tomadas y desarrolladas por [Farfán 1997, p.28]:

F es la diferencia entre los valores inicial y final de Tsenθ , en efecto $\Delta\,(t\mathrm{sen}\theta)$; por tanto (4.2) se convierte en,

$$\Delta\,(\mathrm{Tsen}\theta) = m\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{4.3}$$

Al tomar vibraciones pequeñas de la cuerda el ángulo es pequeño, es decir que sen$\theta \approx \tan\theta$, donde $\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$. La ecuación (4.3) adquiere la forma:

$$\frac{\Delta\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x} = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

si $\Delta x \to 0$, se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{T}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Como la masa y la tensión son constantes obtenemos finalmente la ecuación,

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{4.4}$$

siendo $a = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{m}}$. La solución de esta ecuación implica encontrar una expresión de la forma $y\,(x,t)$, la cual satisface las condiciones: $y\,(0,t) = 0$, $y\,(\pi,t) = 0$ y las condiciones iniciales $\frac{\partial y}{\partial t}\mid_{t=0} = 0$ y

$y(x,0) = f(x)$. El método de separación de variables brinda solución a la ecuación diferencial de segundo orden. Para ello se supone que la solución es de la forma:

$$y(x,t) = u(x)\,v(t)\,, \tag{4.5}$$

y sustituyendo en (4.4) se tiene,

$$a^2 u''(x)\,v(t) = u(x)\,v''(t)\,,$$

equivalente a,

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{v''(t)}{v(t)}.$$

se desprenden las siguientes ecuaciones:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \tag{4.6}$$

$$v''(t) + \lambda a^2 v(t) = 0. \tag{4.7}$$

Para cada ecuación se poseen respectivamente las siguientes condiciones iniciales $u(0) = u(\pi) = 0$, y $v'(0) = 0$ y $v(0) = f(x)$, donde la solución de (4.6) es:

$$u(x) = c_1 \mathrm{sen}\sqrt{\lambda}x + c_2\cos\sqrt{\lambda}x,$$

como $u(0) = 0$, entonces se deduce que,

$$u(x) = c_1 \mathrm{sen}\sqrt{\lambda}x,$$

De la segunda condición inicial $u(\pi) = 0$ se deduce que $\sqrt{\lambda}x = n\pi$ para n en los enteros positivos, es decir que $\lambda = n^2$; luego las soluciones de la ecuación (4.6) están dadas por:

$$u_n(x) = \mathrm{sen}nx,\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

Para (4.7) las soluciones son,

$$v_n(t) = \cos nat.$$

Finalmente las soluciones de (4.5) quedan determinadas por:

$$y_n(x,t) = \mathrm{sen}nx\cos nat,\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

donde para cada n se satisface la ecuación (4.4). Más aún, lo anterior es válido para cualquier suma finita de múltiplos de la forma,

$$a_1 \text{sen} x \cos at + a_2 \text{sen} 2x \cos 2at + \cdots + a_n \text{sen} nx \cos nat.$$

Teniendo en cuenta que $y(x,0) = f(x)$ se encuentra que,

$$f(x) = a_1 \text{sen} x + a_2 \text{sen} 2x + a_3 \text{sen} 3x + \cdots + a_n \text{sen} nx.$$

Esta ecuación representa una serie trigonométrica. Vale la pena cuestionarse acerca de las funciones representables mediante la serie anterior. Una serie de Fourier asociada a la función $f(x)$ es dada por:

$$\frac{1}{2a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \text{sen} nx\right).$$

Por otra parte en la *Teoría Analítica del calor* de Fourier, uno de los principales problemas está relacionado con determinar cuál es la temperatura en cada punto de un cuerpo en un instante dado. Para ello Fourier, se propone resolver la siguiente ecuación:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ \ t > 0 \tag{4.8}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0,\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L. \tag{4.9}$$

El desafío para Fourier consiste en encontrar la solución de la ecuación (4.8). Para ello, utiliza el método de separación de variables el cual consiste en suponer que la ecuación solo depende de dos variables y buscar soluciones de la forma $u(x,t)$; así tal como se muestra en la memoria de Fourier[37] se considera una función de la forma $u = X(x)T(t)$; al sustituir en la ecuación (4.8) y denotando se obtiene:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda,$$

donde $-\lambda$ es la constante de separación. La expresión anterior conduce a las ecuaciones:

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X(L) = 0 \tag{4.10}$$

[37] Ver [Fourier 1878]

$$T' + k\lambda T = 0. \tag{4.11}$$

Las soluciones de la ecuación (4.10) están dadas por:

$$X\left(x\right) = c_1 + c_2 x, \qquad \lambda = 0$$

$$X\left(x\right) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \mathrm{senh} \alpha x, \qquad \lambda = -\alpha^2 < 0$$

$$X\left(x\right) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \mathrm{sen} \alpha x, \qquad \lambda = \alpha^2 > 0, \tag{4.12}$$

de acuerdo a las condiciones iniciales y al aplicarlas a la expresión (4.12) se obtiene $X\left(L\right) = c_2 \mathrm{sen}\alpha L = 0$. Para obtener una solución no trivial, supongamos que $c_2 \neq 0$ y $\mathrm{sen}\alpha L = 0$ donde $\alpha L = n\pi$, en efecto $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, quedando la ecuación,

$$X\left(x\right) = c_2 \mathrm{sen} \frac{n\pi}{L} x, \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

Por otra parte de la ecuación (4.11) se obtiene $T\left(t\right) = c_3 e^{-k\left(n^2\pi^2/L^2\right)t} \sin \frac{n\pi}{L} x$. Finalmente tras considerar el principio de superposición se obtiene que:

$$u\left(x, t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(n^2 \pi^2 / L^2\right)t} \mathrm{sen} \frac{n\pi}{L} x,$$

la expresión anterior corresponde a una serie infinita en términos del seno; debido a la condición inicial dada en 4.9 la expresión $u\left(x, t\right)$ toma la forma,

$$u\left(x, 0\right) = f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Para Fourier el problema de la conducción del calor en una lámina estaba ampliamente condicionado a la manera de hallar los coeficientes de la forma a_k; para ello Fourier supone,

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \mathrm{sen} \left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt.$$

La manera de representar una función mediante series de senos y cosenos está ventilando nuevos lineamientos referentes al uso de funciones trigonométricas para modelar problemas de orden físico. De este modo, la serie permite relacionar e introducir el uso de las series trigonométricas, puesto que a partir de ellas se permitía la introducción de nuevas cantidades distintas a las funciones elementales. Los problemas de orden físico permitieron en el siglo XVIII a los matemáticos pensar en la manera de expresar una función arbitraria mediante una serie trigonométrica la cual relacionara senos y cosenos.

Lo interesante del método de Fourier es que las funciones involucradas debían tener una representación en series de senos y cosenos, denominada representación en series de Fourier. Así, la representación comienza a ventilar el surgimiento de la noción de función vista como la relación entre dos conjuntos donde a cada elemento de un conjunto le corresponde un elemento del otro. De acuerdo a esto, se confirma la definición de función dada por Fourier, el cual define que "una función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola"[38].

4.3. Series de potencias en Cauchy, rigor y formalismo en el siglo XIX

En el *Curso de Análisis* de 1821, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) establece una serie de criterios de convergencia para series numéricas y de potencias. En su obra se define un amplio bagaje teórico que permite domesticar el infinito[39]. Cauchy dedica un capitulo titulado *Sobre la convergencia y divergencia de series. Reglas para la convergencia de series. La suma de series convergentes,* en el cual define una serie como una secuencia indefinida de cantidades de la forma:

$$u_0, u_1, u_2, .., u_n, \tag{4.13}$$

y establece la suma como,

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}. \tag{4.14}$$

Igualmente Cauchy establece que si la suma s_n, a medida que n aumente indefinidamente y no alcanza algún límite entonces la serie diverge, y en el caso contrario converge, siendo u_n el término general. El interés de Cauchy estaba relacionado con analizar y determinar una serie de teoremas que permitieran conocer la convergencia de una serie de términos positivos, por ejemplo en su Teorema II, menciona:

Teorema 9. [40]*Si para valores crecientes de n, la razón*

[38]Tomado de [Ruthing, p.73]

[39]Entendemos por domesticar al infinito como la instauración de la noción de límite como elemento que formaliza el infinito potencial.

[40]Tomado de [Cauchy 1821, p.92]

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converge a un límite fijo k, la serie (4) converge siempre que $k < 1$, y diverge siempre que $k > 1$. Este teorema modernamente es conocido como el criterio de la razón de convergencia.

Parte del recorrido histórico, que se evidencia en los trabajos anteriores, da lugar a preguntarse por los procesos de validación de los mismos, y el momento histórico en que cada trabajo se encuentra, es decir, que dependiendo de su época, se tenían unos protocolos de validación y aceptación por parte de la comunidad interesada. Por lo cual, este trabajo da cuenta de que en la formación de la disciplina, en este caso la introducción de lo trascendente, existen unos protocolos de validación que si bien son comunes, están ligados a unos cánones determinados de aceptación por parte de la comunidad matemática. Así en esta indagación mostramos que la formalización de los procesos y el tratamiento de las series infinitas está ligada a un desarrollo de procedimientos y técnicas que eran aceptadas por las comunidades matemáticas. Sin embargo, a causa de los problemas de rigor surge la necesidad de demostrar y las proposiciones se consideran verdaderas solamente si se logran demostrar; evidentemente esta condición no era considerada fundamental para llegar a resultados, ya que en su mayoría los resultados eran vistos como intuitivos.

Cauchy en su curso demuestra una serie de criterios que permiten determinar la convergencia de series infinitas, entre estos se destacan:

1. El criterio de la raíz, teniendo como referencia el límite $\sqrt[n]{\left|U_n\right|}$
2. El criterio del cociente, teniendo como referencia el límite de $\frac{\left|U_{n+1}\right|}{\left|U_n\right|}$
3. El criterio del producto: Si $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n.V_n)$ converge.
4. El criterio de la integral: Si $U(x)$ tiende monótonamente a cero al tender x a infinito, entonces $\int_1^{\infty} U(x)\,dx$ y $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ convergen o divergen simultáneamente.

Con Cauchy se comienza a vislumbrar un proceso de formalización, que va más allá de los trabajos previos sobre series infinitas; no solamente brinda un tratamiento a las series infinitas, sino que crea un catalizador que permite diferenciar y validar el universo de los objetos y series que convergen. Cauchy va mucho más allá de la convergencia de series numéricas, y extiende sus resultados al caso en que las series seas de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ donde } f_n(x) \text{ es continua para todo } n, \tag{4.15}$$

llamada series de funciones. Exactamente existió gran controversia por un teorema que Cauchy demostró en el cual se enuncia lo siguiente:

Teorema 10 (Falso teorema de Cauchy). [41] *Cuando los diferentes términos de la serie ΣU_nson funciones de la misma variable x, continuas con respecto a esta variable en las proximidades de un valor particular para el que la serie es convergente, entonces la suma S de la serie es una función continua de x en las proximidades de ese valor particular.*

Demostración. En términos modernos consideremos $f(x) = \sum f_n(x)$, donde $f_n(x)$ es continua para todo n. Defínase

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} f_m(x)$$

$$r_n = \sum_{M=n+1}^{\infty} f_M(x)$$

Sea $\epsilon > 0$

Como $S_n(x)$ es continua, entonces existe $a > 0$, tal que,

$$\left|S_n(x+b) - S_n(x)\right| < \epsilon \text{, si } |b| < a.$$

-Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge, existe N, tal que $|r_n(x)| < \epsilon$, para todo $n > N$.

-Como $\sum_{n=0}^{n} f_n(x+b)$ también es convergente, existe M tal que $|r_n(x+b)| < \epsilon$, para todo $n > M$.

De acuerdo con lo anterior se tiene:

$|f(x+b) - f(x)| = |S_n(x+b) - +r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x)| \leq |S_n(x+b) - S_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x+b)| \leq 3\epsilon$

para todo $b < a$, y por lo tanto, f es una función continua. □

La demostración anterior presenta un problema en el sentido de la dependencia de la variable a y su relación con ϵ. Para Cauchy, la escogencia de N depende sólo de ϵ, cuando debe depender del x escogido. Además el M debe depender de $x+b$, y quedaría,

$|f(x+b) - f(x)| = |S_n(x+b) + r_n(x+b) - S_n(x) - r_n(x)| < 3\epsilon$ tomando $n = \text{máx}_z N(\epsilon, z)$ y $b < a(\epsilon, x, n)$.

El teorema anterior establece que el límite de una sucesión de funciones continuas es continua; la demostración realizada por Cauchy tiene algunas excepciones, como lo menciona Niels Henrik Abel (1802-1829) en 1826. Abel proporciona un contraejemplo para una serie de funciones, la cual

[41] Tomado de [Cauchy 1821, p.90]

no satisface el teorema de Cauchy; en efecto tomando a $f(x) = \frac{1}{2}x$, para $x \in [-\pi, \pi]$ y $f(x+2\pi) = f(x)$ para otro caso. A partir de esto surge la discusión relacionada con la convergencia puntual y uniforme, y la manera cómo se puede aproximar una función mediante un polinomio.

Por otra parte, teniendo en cuenta el desarrollo histórico presentado en la consolidación y unificación de la teoría de series surgen problemas relacionados con el rigor y la manipulación de las mismas, es el caso de la serie:

$$1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2} \tag{4.16}$$

llamada *serie de Grandi* en honor a Luigi Guido Grandi (1671-1742), la cual al realizar ciertos arreglos algebraicos se llega a que la suma da $\frac{1}{2}$ u otro valor entero que se quiera. Si se denota la suma como,

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

al agrupar apropiadamente la expresión anterior se obtiene,

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S,$$

lo cual equivale a $S = \frac{1}{2}$; el agrupar apropiadamente la suma denotada por S es posible generar cualquier otro valor. El establecimiento de igualdades como (7) ponen en duda los procesos de validación de los resultados, y esta situación se presenta como una ruptura porque nos muestra que lo infinito no puede ser tratado algebraicamente como generalización de lo finito.

En términos generales, la consolidación de la teoría de series puede situarse y clasificarse en tres etapas, una intuitiva, algorítmica y formal;

1. Una etapa intuitiva, ligada a lo geométrico y con una idea intuitiva de convergencia de series de la forma $\sum a_n$. Por ejemplo en los trabajos de Mengoli, Wallis y Mercator se vislumbra el tratamiento intuitivo de las series numéricas. Cabe destacar que esta etapa es transversal en el recorrido histórico mostrado en la tesis.

2. Una etapa algorítmica, la cual se encuentra relacionada con procedimientos y operaciones algebraicas para llegar a resultados; por ejemplo los métodos desarrollados por Newton (reversión de series), Leibniz y Taylor. Esta etapa es crucial en el desarrollo de la teoría de series, puesto que a partir de ella se desarrollaron primigeniamente los métodos para realizar cuadraturas las cuales conducen a series de potencias.

3. Una etapa de formalización, en la cual se destaca la consolidación y unificación de trabajos y resultados provenientes de diferentes matemáticos como Mercator, Newton, Leibniz, Euler, Bernoulli y Cauchy entre otros; claramente en la consolidación de los elementos teóricos es

que se comienza a ventilar la teoría de series como una rama del análisis matemático.

Finalmente, es claro que la teoría de series alcanza un punto máximo con el trabajo de Cauchy; en su obra se define, formaliza y estructura el concepto de serie y los criterios de convergencia.

4.4. Teorema de aproximación de Weierstrass

Karl Weierstrass (1815-1897) trabaja con series de potencias. Uno de sus más grandes resultados es que toda función continua se puede aproximar mediante una sucesión de polinomios.

Teorema 11 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea f es una función real continua en $[a, b]$ entonces dado $\epsilon > 0$, existe un polinomio $p(x)$ tal que*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

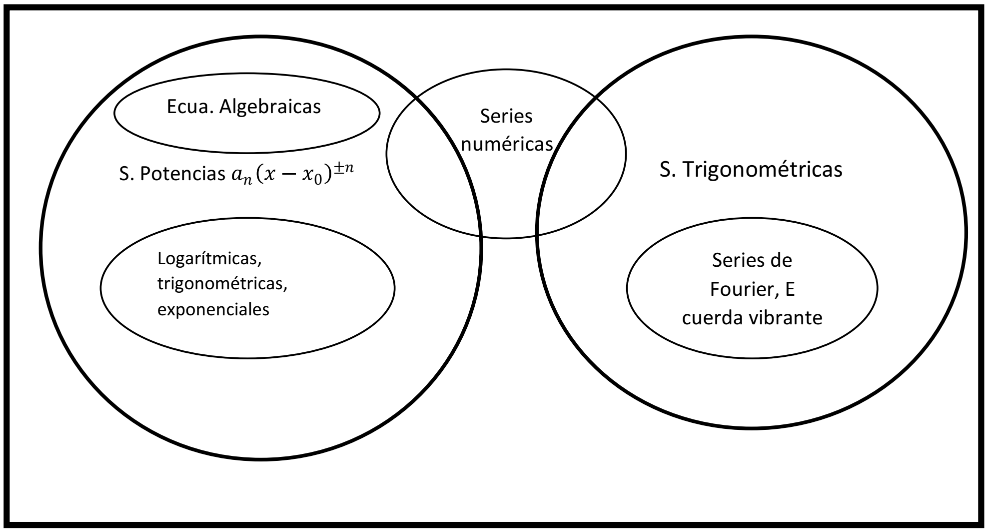
para todo $x \in [a, b]$.

El teorema anterior fue enunciado por Weierstrass y muestra que se puede aproximar una función f continua mediante una sucesión de polinomios. En este teorema el concepto de convergencia uniforme es clave para aproximar la función f mediante polinomios.

4.5. Clasificación de las series infinitas

En este apartado hemos clasificado las series infinitas en tres familias:

1. Series de potencias
2. Series numéricas
3. Series trigonométricas



Cuadro 4.1: Clasificación de series infinitas

La primera acoge las series destacadas por Newton- Leibniz entre otros, fundamentalmente expresiones de la forna $a_n\,(x - x_0)^{\pm n}$.
La segunda acoge las series numéricas generadas por problemas de movimiento como la paradoja de Aquiles.
La tercera acoge las trigonométricas, producidas por la solución de problemas como el de la cuerda vibrante y la conducción del calor.

Las series trigonométricas surgen por la necesidad de resolver problemas de orden físico.

Esta clasificación indudablemente se propone bajo el hecho de que la teoría de series se ha constituido por diversos elementos, bien sean algebraicos, geométricos o aritméticos.

5. CONCLUSIONES

En primer lugar, es conveniente anotar que entre los aspectos claves en el desarrollo histórico de las Matemáticas, lo trascendente ocupa un lugar preponderante. De hecho, lo trascendente es algo que ingresa tarde al corpus de las Matemáticas. Por ejemplo en la solución de ecuaciones sabemos que no basta decir que la solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ corresponde al número $\sqrt{2}$ y automáticamente clasificarlo como irracional. Es necesario exhibir tal objeto a través de propiedades que permitan identificarlo como número. La dificultad de fondo es que no existe una forma de exhibición completa, porque su representación decimal es infinita y no periódica. Sólo la construcción de los reales, a través de sucesiones fundamentales en Cantor y cortaduras en Dedekind, hace posible la caracterización completa, no sólo de las raíces no exactas, sino también de números más complicados como π, e y el resto de números trascendentes. Este ejemplo nos permite relacionar, con el caso de las funciones, la cuestión de la representación de los números irracionales. Sabemos que no es posible conocer a cabalidad todas las cifras decimales. Pero decimos que los tenemos bien determinados cuando podemos escribirlos con tantas cifras decimales como queramos; es decir, tan aproximado como se quiera. Con las curvas no algebraicas, que posteriormente darán lugar a las funciones trascendentes, pasa algo similar: al no poderlas caracterizar completamente, buscamos acercarnos a ellas a través de aproximaciones. En esta contingencia se pueden entender los esfuerzos de matemáticos como Lagrange y Taylor al intentar representarlas a través de series de potencias.

Modernamente la idea de número trascendente se encuentra vinculada con la solución de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros; un número trascendente es un número real que no es raíz de ninguna ecuación algebraica. Sin embargo, el proceso de construcción de los números reales como los conocemos modernamente le antecede un arduo recorrido que comienza en la antigüedad griega con la emergencia de lo irracional.

De hecho, lo trascendente en Matemáticas ha sido punto de discusión desde la antigüedad. Aunque en dicha época no existía una conciencia de lo trascendente y lo irracional, sus raíces subyacen con la aparición de las magnitudes inconmensurables y números como π.

De hecho, es en el trabajo de Arquímedes que se puede ubicar una primera huella de lo trascendente en Matemáticas. Concretamente al establecer la relación entre la longitud del círculo y su diámetro. Aunque en este momento no se encuentra la idea de número trascendente e irracional, este problema hace parte de lo que posteriormente va a llevar a lo trascendente. Arquímedes demuestra que es posible construir un círculo equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos corresponden al radio y la circunferencia del círculo. Sin embargo, en la solución dada por Arquímedes subyace algo que no esta del todo caracterizado y es la constante de proporcionalidad, que corresponde al número trascendente π; en esto notamos que lo trascendente se constituye primigeniamente a partir de las características del círculo.

Por otra parte desde la antigüedad griega se clasificaron los problemas de la geometría en planos, sólidos y lineales[42]. El círculo se clasificaba como problema plano. Específicamente, en la cuadratura del círculo por parte de Arquímedes estaban emergiendo cantidades desconocidas a partir de la manipulación del mismo. Este tipo de cantidades corresponde a lo que posteriormente se consolidará como números trascendentes.

En la antigüedad griega los problemas que tenían que ver con procesos infinitos eran eludidos. La razón de esto era que se carecía de un formalismo (el paso al límite) que permitiera controlar y operar problemas donde estuviera presente el infinito potencial; este tipo de problemas da lugar a paradojas como la de Zenón. Sin embargo, este tipo de paradojas fueron brindando elementos

[42] Ver [Descartes 1637, p.315]

para esbozar que existía algo que no estaba del todo definido, y que los matemáticos de la época intuían que al caracterizar el objeto faltante, podrían dar solución a muchos problemas. En este sentido, lo trascendente es algo que se va dando a través del desarrollo histórico en grandes períodos de tiempo. Cabe señalar, que existe una diferencia entre la teoría de números trascendentes y el desarrollo de lo trascendente en relación a las curvas. Precisamente, en la primera se refiere a que existen números que no satisfacen ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros, es decir que la teoría de números trascendentes tiene relación directa con el álgebra abstracta y la resolución de ecuaciones; por tanto la teoría de números trascendentes y las curvas trascendentes difieren en el objeto a ser tratado, una desde el punto de vista algebraico, mientras la segunda desde lo geométrico y analítico. Aunque las curvas trascendentes y los números trascendentes son subsidiarios en el sentido de que a partir de las distintas manipulaciones de las curvas mecánicas, dan lugar a ciertas cantidades que no son racionales, podría pensarse que a partir del tratamiento de curvas van emergiendo los números trascendentes.

En principio lo trascendente se identifica en la Matemática a partir de las curvas establecidas por Descartes. Pero en el tratamiento de estas curvas va apareciendo lo trascendente en lo numérico. Es el caso por ejemplo en la cuadratura del círculo por parte de Wallis, el cual deduce una cantidad que corresponde a la cuadratura del círculo. De hecho, Wallis no pudo identificar si la cantidad obtenida es irracional,algebraica o trascendente. Lo trascendente va emergiendo en el tratamiento de las curvas. De hecho, los números trascendentes no poseen alguna ecuación algebraica, para ello es necesario desarrollarlos mediante series de potencias.

En particular, en este trabajo de tesis hemos tomado como referencia la evolución del tratamiento de curvas trascendentes en Matemáticas y la manera en que las series de potencias permearon y fueron el ingrediente para que se les diera estatuto matemático.

La manipulación de estas curvas se daba en forma sintética. Sin embargo, para poder incorporarlas a la matemática fue necesario establecer:

1) la representación de la curva como una ecuación.

2) luego pasar a la representación como una función.

En este sentido, el circuito curva-ecuación-función, es clave al momento de determinar y rastrear lo trascendente. Consideramos que en el marco de este circuito se encuentra el desarrollo histórico clave que permite establecer un panorama concreto acerca de lo trascendente en Matemáticas.

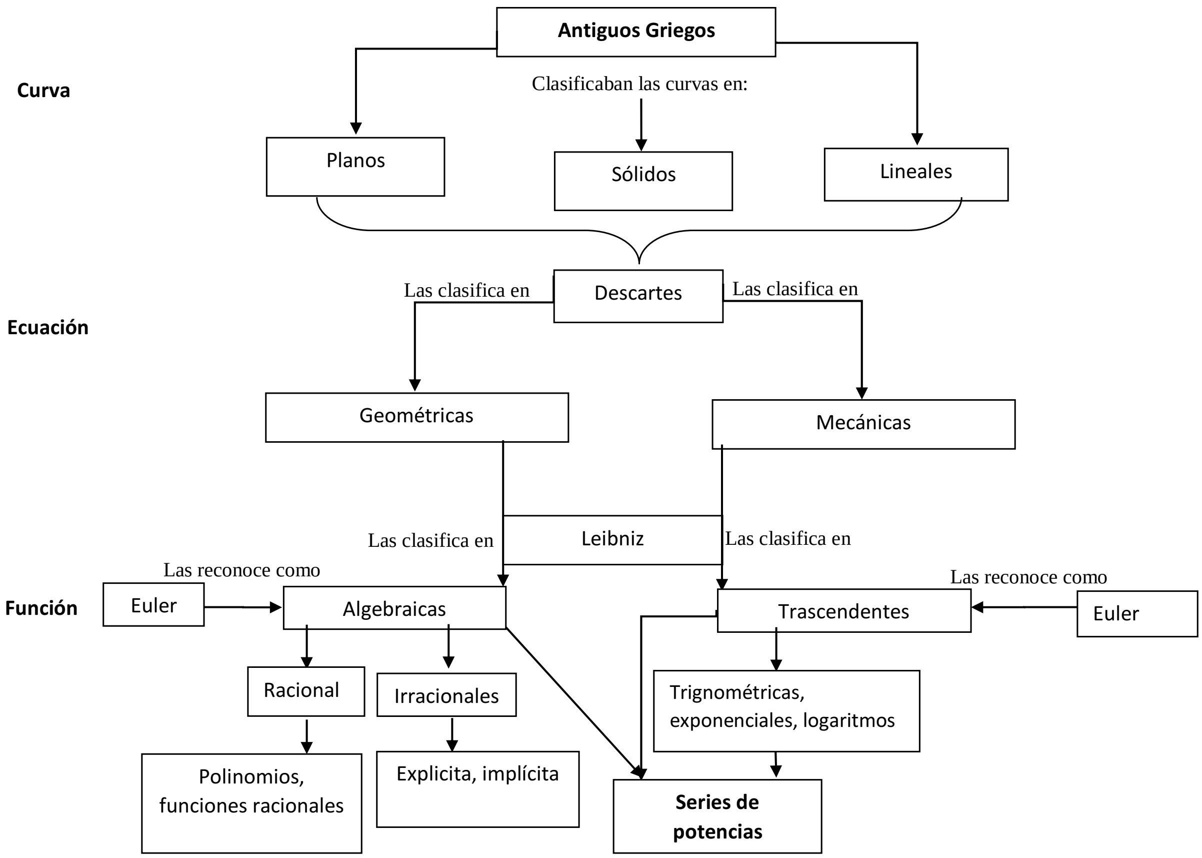
El tratamiento de curvas mecánicas a partir de las series de potencias da lugar a que se establezcan las series de potencias como elemento básico para representarlas. Pero en las series de potencias, aparecen cantidades que no son números racionales, sino que corresponden a números irracionales o trascendentes.

Concretamente en este trabajo reivindicamos que la herramienta conceptual mediante la cual ingresó lo trascendente a la Matemática son las series de potencias. De hecho, la necesidad de manipular y hacer cálculos en estas curvas fue dando entrada a las series infinitas. En principio el uso de las series causó críticas, debido al tratamiento y manipulación[43]. Se manipulaba las series de potencias de manera libre, sin tener en cuenta condiciones para la convergencia; esto conllevó a que abundaran las manipulaciones algebraicas con series y que a partir de ello emergieran nuevas representaciones entre estas se destacan las series de Taylor y Maclaurin.

Las series de potencias comienzan a intervenir de manera transversal en el proceso de formalización de lo trascendente en Matemáticas, puesto que con ellas fue posible dar representaciones para las curvas mecánicas. De hecho, la instauración de la teoría de series se dió cuando existió un reconocimiento por parte de los matemáticos de que las curvas mecánicas se podían representar mediante una serie de potencias; esto implica el reconocimiento de las series como una función variable, la cual permitía generar punto a punto la curva.

Si analizamos las líneas de desarrollo referentes a las curvas conocidas a lo largo de la historia de la Matemática, podemos distinguir 2 movimientos en su línea de evolución; el primer movimiento corresponde al desarrollo que va de los antiguos hasta Descartes y el segundo movimiento corresponde al movimiento ecuación-función. El siguiente cuadro muestra las líneas de evolución de las curvas.

[43]Uno de los precursores del uso y manipulación de series de potecias es Newton en *Dy Analysis* [Newton II 1711], el cual exhibe el uso de las series de potencias y la relación con las curvas mecánicas.



Cuadro 5.1: Clasificación de curvas

Para ello se como punto de partida el itinerario curva- ecuación- función. De acuerdo al cuadro, mostramos cómo las curvas comienzan a caer y a tener acogida bajo ciertas líneas que permitieron un desarrollo más formal. En un primero momento, la concepción de los griegos hacia las curvas permitió distinguir su primera clasificación (problemas planos, sólidos y lineales). Posteriormente en la *Geometría* de Descartes, se acoge esta concepción y se clasifican las curvas geométricas y mecánicas, donde excluye a las últimas de la geometría debido a la imposibilidad de amarrarles una ecuación algebraica; mientras que en la línea de desarrollo de las curvas geométricas se conciben las curvas algebraicas, racionales, irracionales, polinomios infinitos (series de potencias) caracterizados por Euler.

Por otra parte, la línea de desarrollo de las curvas mecánicas (trascendentes) nombradas por Leibniz e identificadas por Euler se reconocen los logaritmos, exponenciales y trigonométricas. Notemos cómo este desarrollo se encuentra enmarcado en el itinerario curva, ecuación y función; las series de potencias aparecen como una herramienta alternativa que permitió acoger las curvas excluidas de Descartes y de los antiguos.

Consideramos que la clasificación anterior es muy importante en el desarrollo e incorporación de lo trascendente en Matemáticas, debido que al separar las curvas por familias se estaba dando entrada a que tenían un comportamiento diferenciador y que en la época en que fueron abordadas no se tenían las herramientas formales o informales para ser manipuladas. Así, en el desarrollo histórico de las Matemáticas hasta Descartes, el problema de asociarles una ecuación algebraica a una curva mecánica estaba sin solución, pero posteriormente con la aparición de los trabajos de Newton, Leibniz, Euler entre otros, el problema va adquiriendo un mayor estatus.

El universo de las funciones se fue ampliando, sin embargo, el común denominador de los objetos puros del pensamiento como las funciones y las curvas trascendentes, en relación al tratamiento, son las series de potencias. Las series potencias fueron emergiendo producto de la necesidad de incorporar lo infinito en la matemática.

Lo trascendente ingresa en la Matemática a través de las series de potencias, en este sentido, hay necesidad de instaurar el *Ánalisis* como rama de las Matemáticas, y a partir de esta instauración emerge una nueva operación que es la convergencia. Pero para poder incorporar lo trascendente en Matemáticas, nos hemos dado cuenta que el movimiento que se da para el reconocimiento de lo trascendente no se da tanto por lo numérico sino en el reconocimiento de las curvas; es imposible hacer cálculos en estas curvas (circulares, logarítmicas, exponenciales, etc.), con la sola intervención de las operaciones de suma, resta, división, multiplicación y radicación. Ello plantea la necesidad de encontrar métodos para caracterizar propiedades de una curva cualquiera, ya sea de índole algebraica o trascendente, conocida o definida en forma general. Estos métodos tienen vínculos estrechos con el infinito, un concepto que los matemáticos habían intentado eludir por todos los medios. Evidentemente la forma en que se desarrollaron dichos métodos, fue inicialmente un elemento que causó críticas debido a su tratamiento y manipulación.

De esta forma todo lo anterior sustenta el planteamiento que las series de potencias fueron el mecanismo mediante el cual se le brindó estatuto matemático a lo trascendente. Esto constituye la hipótesis principal de esta tesis. Esto lo demostramos a través del desarrollo histórico desarrollado en los capítulos anteriores.

Por otra parte hemos encontrado una relación clave con un artículo publicado en el año 2013 [44] el cual se encuentra una expansión para:

$$\int f(x)\, dx \tag{5.1}$$

en términos de una serie de potencias. La relación tiene que ver con una carta que envió Bernoulli a Leibniz en el año 1694. Hemos detectado que en artículo publicado se ha obtenido una equivalencia

[44] El artículo se titula: A generalization of integrals by the formula of integration by parts, Mendoza 2013 [Mendoza II 2013].

con el resultado obtenido por Bernoulli. Por un lado, Bernoulli encuentra que se puede expandir la $\int ndz$ como una serie de potencias, usando un procedimiento algo artificial. Por otra parte, en el artículo publicado se encuentra la expansión para la expresión(5.1) usando la formula de integración por partes. Ambos procedimientos conducen al mismo resultado, pero en el caso de Bernoulli no se mencionan explícitamente que tipo de expresiones pueden ser expandidas mediante la serie de potencias. Este tipo de conexiones entre los procedimientos realizados en el siglo XVII y la manera como fue hallada en el artículo publicado, evidencia como los mecanismos algorítmicos se van estableciendo; pasando por una etapa inicial hasta siglos después formalizarse en un sentido mas riguroso.

Todo el desarrollo histórico mostrado en los capítulos de esta tesis nos permiten identificar tres momentos claves donde se vislumbra lo trascendente en Matemáticas. El primer momento lo denominamos *Momento Primario de lo Trascendente*. El segundo momento, *Momento Pre-formal de lo Trascendente* y el último *Momento Formal de lo Trascendente.*

En lo que corresponde al *Momento Primario de lo Trascendente"*, empieza a evidenciarse con la aparición de las magnitudes inconmensurables y la cuadratura del círculo.

En el segundo momento, denominado *Momento Pre-formal de lo Trascendente*, comienza en la obra John Wallis (1616-1703). Tras la necesidad de realizar la cuadratura del círculo Wallis manipulas razones de cantidades numéricas. Wallis encuentra una expresión para π como un producto infinito. De hecho, debido a la poca información acerca de dicha expresión daría apertura a las cantidades irracionales no algebraicas. Adicionalmente la representación mediante fracciones continuas se convierte en otro ingrediente que da entrada a dichas cantidades.

Hasta ahora, en estos dos momentos identificamos que lo trascendente en Matemáticas tiene sus raíces a partir de las magnitudes inconmensurables, la cuadratura del círculo en relación con lo numérico, y la exclusión dada por Descartes en la geometría en relación con las curvas. Históricamente en ambos momentos no existe conciencia de que se estaba engendrando lo trascendente. Pero los matemáticos eran conscientes de que faltaba algo y que eso brindaría solución a muchos problemas.

Por último en el *Momento Formal de lo Trascendente* se comienza a evidenciar una formalización y aceptación de las cantidades trascendentes en el siglo XVII-XVIII. Lo numérico adquiere sentido cuando es posible caracterizar y expresar por ejemplo la cuadratura del círculo en términos de una serie numérica infinita. Tal como lo realiza Leibniz,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Se estaba enmarcando una relación directa entre los números trascendentes y las cuadraturas de las curvas como una relación de que a cada cuadratura se le podía asociar una cantidad; en la mayoría de los casos dicha cantidad correspondía a un número trascendente.

En el caso de la cuadratura del círculo; la introducción de lo trascendente en Matemáticas se da en primer lugar con las series de potencias antes de lo numérico. Aunque no podemos desconocer que lo numérico en parte sustentó muchos desarrollos en series infinitas. Las series se constituyeron en el ingrediente faltante para incorporar lo trascendente.

A continuación, describimos los 3 momentos que identificamos teniendo en cuenta el desarrollo histórico realizado en los capítulos de la tesis.

5.1. Momento primario de lo trascendente

En la búsqueda e indagación referente a los primeros atisbos de lo trascendente en Matemáticas, vale la pena destacar la escuela pitagórica y sus primeros pasos relacionados con lo irracional.

En la antigüedad griega para trabajar matemáticamente, existían muchas limitaciones relacionadas con la ausencia de un formalismo y un corpus teórico que permitiera manipular los irracionales. En este sentido en la línea de desarrollo de estos antecedentes iniciales de lo trascendente e irracional en Matemáticas, emerge una aproximación para el valor de π realizada por Arquímedes de Siracusa (287 a.C-212 a.C), donde para poder encontrar la aproximación correspondiente a π, recurre a métodos numéricos de aproximación, en particular agotando el círculo por exceso y por defecto. En Arquímedes se comienza a inaugurar el cálculo numérico mediante aproximaciones, demostrandoo que el círculo es equivalente a un triángulo rectángulo. Aunque Arquímedes no tiene conciencia de que el valor de π es la longitud de la circunferencia, dividida dos veces el radio, halla una buena aproximación que permite esclarecer un poco la naturaleza y la manera de generar dicho número.

Aparentemente lo irracional se ha venido engendrando con la necesidad de resolver un cúmulo de problemas, que si bien los antiguos desecharon por falta de mecanismos teóricos, matemáticos de diferentes latitudes los abordaron y en algunos casos dieron luces respecto a la solución; pero esta solución parcial, promovió diferentes caminos procedimentales que ayudaron a introducir nuevas maneras y concepciones respecto a los problemas que involucraban soluciones irracionales.

En las magnitudes inconmensurables, no existe un espíritu de lo trascendente. Sin embargo existen las ideas primarias acerca de lo que posteriormente se llamará trascendente. Lo trascendente se encuentra en los diferentes intentos de resolver problemas como la cuadratura del círculo, sin éxito alguno.

5.2. Momento pre-formal de lo trascendente

Previamente a los métodos desarrollados por Newton y Leibniz, nos encontramos con Wallis; su trabajo consiste en hallar cuadraturas mediante el uso de razones de series numéricas. En el trabajo de Wallis se identifican dos elementos claves los cuales juegan un papel fundamental en la línea de desarrollo de las series, en particular las numéricas. El primer aspecto tiene relación de que Wallis usaba razones de series numéricas para encontrar cuadraturas, y el segundo aspecto es que las utilizaba sin tener idea alguna de la convergencia, pero el intuía que las series convergían. En este sentido Wallis usaba por ejemplo expresiones como:

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Cabe señalar que en este tipo de razones de series numéricas, Wallis suponía que la regla de formación seguía alguna especie de patrón de formación, y que por tanto al aumentar la cantidad de términos en el numerador y denominador, el resultado era invariante. En este sentido en la obra de Wallis se evidencia una especie de idea de convergencia, pero valía mas la intuición para concluir que era convergente. Trabajos como estos nos llevan a suponer que existía una manipulación informal e intuitiva, que permitía obtener resultados coherentes. Wallis en su trabajo visualiza una serie de cantidades las cuales eran desconocidas. En el sentido de que no conocía si correspondía a una cantidad racional o irracional. El establecimiento de la igualdad (5.2)

$$\left(\frac{4}{\square}\right) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots} \tag{5.2}$$

estaba inaugurando una cantidad que los matemáticos desconocían con respecto a su naturaleza. En esto se reafirma que el desarrollo de los números trascendentes van de la mano con el tratamiento de las curvas.

El momento *Pre-formal de lo Trascendente*, se relaciona con la idea intuitiva en que se manipulaban las cantidades infinitas. En este sentido, consideramos que la obra de Wallis tiene mucha relación al respecto.

Cuando comienzan a emerger las nociones del cálculo infinitesimal en el siglo XVII se abordan problemas que los antiguos griegos habían relegado tal como el cálculo del área bajo la curva, la cuadratura del círculo, el problema de la recta tangente, la noción de proximidad y en especial las curvas mecánicas; los matemáticos como Isaac Newton $(1643-1727)$, Gottfried Leibniz $(1646-1716)$, John Wallis $(1616-1703)$ comienzan a trabajar e introducir una nueva herramienta que permitió acoger objetos matemáticos, que habían sido relegados como las curvas mecánicas. Aunque la aceptación de estas herramientas teóricas novedosas estuvo cargada de críticas, finalmente todo este cúmulo de conocimientos se constituye en una nueva ciencia, el cálculo.

5.3. Momento formal de lo trascendente

Por otra parte, observemos que en los trabajos de Newton y Leibniz se mantiene la misma idea de Wallis. Para ambos era crucial abordar una gama mas amplía de curvas, pero mas allá de eso, brindaron un tratamiento unificado a problemas que habían sido relegados por Descartes. El interés de Newton, fundamentalmente es desarrollar algoritmos y procesos para determinar cuadraturas, que en muchos de los casos la solución de estas conllevaba a una serie de potencias. Al igual que Leibniz, Newton y sus antecesores, la falta de rigor en sus obras fue causa de críticas, más aún cuando interfieren procesos infinitos. Las series de potencias se convierten entonces en una ruta de escape al problema de curvas y cuadraturas, pero la validez de los resultados que implicaban series de potencias se encontraban en discusión, puesto que se partía del supuesto que la serie obtenida seguía un patrón de formación que al agregar 500 ó 1000 términos el resultado era invariante en el sentido de Wallis.

Justamente, en cuanto a los problemas de rigor, los resultados en el caso del la expansión del binomio por Newton, eran validados multiplicando las series obtenidas, en este sentido Newton obtiene para la cuadratura del círculo que,

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots,$$

al multiplicar el miembro derecho por si mismo debería dar como resultado $(1-x^2)$, en efecto al realizar el producto,

$$\left(1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots\right)\left(1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots\right)$$

efectivamente se obtiene como resultado $1-x^2$. Newton era consciente acerca de los problemas de rigor que carecía su obra, debido a las diferentes críticas recibidas, pero en el siglo XVIII la falta de rigor era el común denominador en los trabajos de sus predecesores. Sin embargo, los trabajos en general eran aceptados por la comunidad de la época, y al parecer era suficiente que la solución mostrada en cada trabajo cumpliera con los cánones demostrativos de la época.

Posterior a Newton, emergen los trabajos de Taylor y Maclaurin. El punto clave de estos trabajos implica tener en cuenta la manera en que varía la curva en cada punto, es decir la derivada (para Newton la fluxión). Para Taylor, era crucial expresar una cantidad en términos de otras que varian dependiendo de algo que denomina, *método de diferencias*[45]. En efecto, la serie de Taylor se convierte en un mecanismo analítico que permite aproximar una curva mediante las variaciones de la misma.

[45]El trabajo de Taylor logra encontrar la manera para expresar una cantidad variable (función) en términos de las derivadas[Taylor 1715, p.37]

La diferencia entre los trabajos de Maclaurin y Taylor es que el primero, en su *tratado de fluxiones,* parte del supuesto que una cantidad puede ser expresada como una serie de la forma:

$$y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$$

Maclaurin, pretende encontrar las constantes $A, B, C, D, ...$, para ello recurre a las derivadas, utilizando incrementos infinitamente pequeños. Por otro lado Taylor define inicialmente la variación como la diferencia $\Delta y = y\left(z+\Delta\right) - y\left(z\right)$. El resultado de Taylor resulta ser un poco mas general que el obtenido por Maclaurin, ambos resultados tienen en común que sus autores no mencionan las condiciones para convergencia.

Con Newton y Leibniz las curvas mecánicas adquieren relación con las series infinitas. Específicamente, con los algoritmos desarrollados fue posible encontrar cuadraturas en especial para las curvas relegadas por Descartes. En la mayoria de los casos dichas cuadraturas corresponden a una serie. Sin embargo, se nota que para encontrar cuadraturas muchos de los resultados de estás implicaban cantidades irracionales. Es allí donde lo trascendente se da primero con las curvas y luego ingresa lo numérico.

Hasta el momento, y de acuerdo al análisis histórico desarrollado, las manipulaciones fueron dabas en términos de series de potencias y en la manera de asociar las curvas mecánicas. Hablando temporalmente, entre 1740 y 1748 aparecen otro tipo de series infinitas, denominadas series trigonométricas, las cuales son el resultado de resolver problemas de orden físico. En esta época los matemáticos se interesaron por resolver problemas como el de la conducción del calor y la cuerda vibrante. Debido a la forma en que se comportaban estos problemas sus variaciones implicaron necesariamente un ángulo.

Por otra parte en el *Curso de Análisis* de Cauchy, se proporciona una compilación de resultados y criterios. En su obra se presenta un cambio de paradigma en el quehacer matemático. La obra de Cauchy se convierte en si misma en la joya del tratamiento y manipulación de las series infinitas al caracterizar y definir cuando una serie es convergente.

El clímax de la representación de funciones mediante series de potencias, se alcanza en la obra de Cauchy, a pesar que en su obra misma se encuentran algunos resultados que obligan a revisiones posteriores, como el "falso teorema de Cauchy" .

Con Cauchy se comienza a vislumbrar un proceso de formalización, que va mas allá de los trabajos previos sobre series infinitas. Brinda no solo un tratamiento a las series infinitas, sino que crea un catalizador que permite diferenciar y validar el universo de los objetos y series que convergen. Pero Cauchy va mucho mas allá de la convergencia de series, y extiende sus resultados al caso en que la serie sea de la forma:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(x\right) \;\text{ donde } f_n\left(x\right) \text{ es continua para todo } n, \tag{5.3}$$

llamada series de funciones.

Claramente, con la emergencia de los criterios definidos por Cauchy la teoría de series comienza a tener un cuerpo teórico que fundamenta los procesos operativos e infinitos mediados con una especie de clasificación en dos sentidos; las series convergentes y aquellas divergentes.

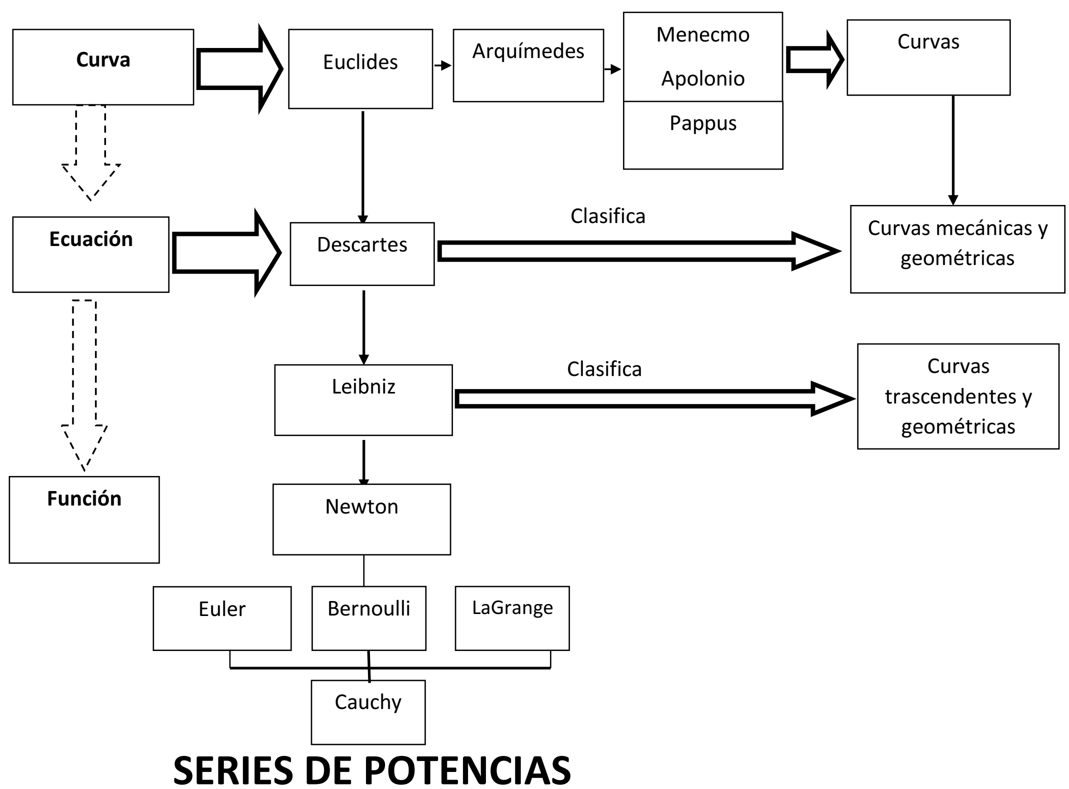
Modernamente los números trascendentes son aquellos que no son raíces de alguna ecuación algebraica. Precisamente en el año 1882 el matemático Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) demuestra la trascendencia de π. Fundamentalmente el resultado de Lindemann consiste en demostrar que no existe un polinomio con coeficientes racionales que tenga a π como raíz. De esta manera en el *momento formal de lo trascendente* se logra consolidar e instaurar el arduo recorrido histórico de lo trascendente en las Matemáticas.

Todo esto nos permite concluir que lo trascendente ingresa a la matemática a partir de las series de potencias; las series de potencias son la herramienta fundamental mediante el cual empieza a emerger lo trascendente en Matemáticas.

5.4. Personajes claves en el desarrollo de la teoría de series

En este trabajo se utilizan varias fuentes primarias, *De Analysis* de Newton [Newton II 1711], el *Análisis infinitesimal* de Leibniz [Leibniz 1684], *la Aritmética del infinito* de Wallis [Wallis 1656], *la teoría analítica del calor* de Fourier [Fourier 1878], *Methodus incrementorum Directa & inversa* de Taylor [Taylor 1715], *el curso de Análisis* de Cauchy [Cauchy 1821]. Las fuentes citadas anteriormente en su gran mayoría se encuentran en su primera edición, lo cual proporciona un documento de primera mano y fiabilidad.

En lo que se refiere a los autores mas significativos relacionados con la instauración de la teoría de series y la relación directa entre el circuito curva- ecuación-función se resume en el siguiente cuadro.



Cuadro 5.2: Circuito Curva-ecuación-función y sus principales representantes

En la línea de las curvas, aparecen los antiguos. Donde a partir de sus trabajos emergen los diferentes tipos de curvas.

En la línea de ecuaciones, Descartes, Leibniz y Newton tienen relación directa con la manipulación de curvas. Sin embargo, Newton y Leibniz los consideramos como los autores claves en el tratamiento de series de potencias. Igualmente, Euler, Bernoulli y Lagrange, aportaron en el desarrollo de la teoría de series.

Cronología de los autores más significativos

- John Wallis (1616-1703). Trabaja desde las razones de series infinitas, logra encontrar una conexión entre las cuadraturas de las curvas de la forma x^n y el exponente n. El trabajo de Wallis es clave en relación a la manipulación de series numéricas infinitas; aunque no existiera un formalismo que permita decidir sobre la convergencia de series, Wallis suponía una especie de "inducción" y que el patrón seguía al infinito. En Wallis se observa el uso de la intuición para establecer que la series de razones numéricas tienden a algún valor fijo.

- Nicolaus Mercator (1620- 1687). En *Logarithmotechnia* trabaja con las tablas de logaritmos. También es uno de los primeros en encontrar una expansión mediante series de potencias y de relacionar el área de la hipérbola con el logaritmo. Aunque las serie de potencias para $\log(1+x)$ era conocida por Newton, Mercator muestra un procedimiento distinto para encontrarla.

- Isaac Newton (1642-1727). Sus diferentes trabajos constituyen uno de los pilares referentes a la representación de ecuaciones mediante series de potencias, todo esto ligado a la creación de técnicas para hallar cuadraturas y anti-cuadraturas desembocan en la creación del cálculo infinitesimal. En relación a las series de potencias, el binomio de Newton permitió conectar la representación de expresiones como el círculo a través de un polinomio infinito. Sin embargo en el *analysis* no se establecen restricciones explícitas para el dominio de las series de potencias.

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 1716). Trabaja con series numéricas y de potencias. Es el primero en introducir el término función y realiza una nueva clasificación de las curvas, en geométricas y trascendentes. En este sentido su idea de trascendencia va enfocada la agrupación de cantidades como los logaritmos, exponenciales y funciones trignométricas debido a que trascienden cualquier ecuación algebraica.

- Brook Taylor (1685-1731). Encuentra una expresión que representa un gran salto cualitativo respecto a la representación de funciones mediante series de potencias. Usa incrementos diferenciales y el comportamiento de estos para estimar el valor de una función $f(x)$. Precisamente en Taylor se vislumbra la aparición de nuevas representaciones las cuales permiten obtener aproximaciones numéricas.

- Colin Maclaurin ($1698-1746$). Toma como punto de partida los trabajos de Brook Taylor y establece una serie de expansiones, mediante polinomios infinitos (series de potencias) centrados en $x = 0$. Lo interesante del trabajo de Maclaurin es suponer que una cantidad variable puede ser expresada mediante $y = A + Bz + Cz^2 + \cdots$

- Johann Bernoulli (1694-1718). En relación con las series de potencias encuentra una expresión analítica la cual permite expresar cuadraturas mediante una serie de potencias. No obstante, dicha expresión posee problemas en cuanto a la convergencia. De esta forma el cúmulo de funciones que satisfacen la expansión de Bernoulli son pocas debido a ciertas condiciones de diferenciabilidad.

- Leonhard Euler (1707-1783). Se encuentra en la línea de fundadores del análisis matemático; asi mismo contribuyo notablemente en la teoría de series, en particular las trigonométricas y su relación con problemas de orden físico como el movimiento de los planetas.

- Joseph Fourier (1768–1830). Contribuye en la manera de ver una función expresada como una serie infinita de senos y cosenos con esto da explicación a la conducción del calor. Justamente el método empleado por Fourier para la solución de la ecuación del calor inaugura una serie de algoritmos para las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Formaliza las bases del análisis matemático con la introducción del concepto de función como punto central. Introduce los criterios de convergencia para series. Su *curso de análisis de* 1821 indudablemente es una obra clave en la rigorización y formalización de la matemática del siglo XX.

- Karl Weierstrass (1815-1897). Conocido como el padre del análisis moderno, Weierstrass contribuyó en la teoría de series y funciones periódicas, funciones de variables reales; define la continuidad, el límite y la derivada tal como se usan modernamente.

Referencias

[Apostol 1960] Apostol, T. M. (1960). Análisis Matemático. Barcelona: Editorial Reverte.

[Balacheff 2000] Balacheff, N. (2000) Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Obtenido de HAL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document

[Boyer 2011] Boyer, C. (2011). A History of Mathematics (Third Edition ed.). New Jersey, United States of America: John Wiley & Sons.

[Burn 2001] Burn, R. P. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. Historia Mathematica , 1-17.

[Carnjellí 2008] Carnjellí, G.,Falsetti, M., Formica, A., & Rodríguez, M. (2008). Un estudio del aprendizaje de validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula. Suma, 25-40.

[Miranda 1988] Carrión Miranda, J. (1988). La geometría en la génesis y desarrollo de la matemáticas. Hermosillo, México.

[Cauchy 1821] Cauchy, A. (1821). Cauchy´s Course d´analyse. (J. Buchwald, Ed., R. E. Bradley, & C. E. Sandifer, Trans.) New York: Springer.

[Descartes 1637] Descartes, R. (1637). La geometría. (J. M. Ron, Ed., & G. Quintás, Trad.) España: Opera Mundi.

[Dugac 1978] Dugac, P. (1978). Sur les fondements de l'analyse de Cauchy a Baire .

[Edwards 1979] Edwards, C. H. (1979). The Historical Development of the Calculus. New York: Springer- Verlag.

[Farfán 1997] Farfán Márquez, R. M. (1997). Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio. (N. G. Philp, Ed.) México, D.F: Grupo Editorial Iberoaméricana.

[Fourier 1878] Fourier, J. B. (1878). The analitical Theory of Heat. (A. Freeman, Trad.) London: Cambridge University Press.

[Euler 1748] Euler, L. (1748). Introduction á l´analyse infinitésimal, A. Tomo I. (J. Labey, Trad.) Paris (Bachelier).

[Fermat 1891] Fermat, P. (1891). Oeuvres de Fermat. (C. Henry , & P. Tannery, Edits.) Paris: Cornelis de Waard.

[Ferraro I 2007] Ferraro, G. (2007). Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815. Historia Mathematica , 62-88.

[Ferraro II 2003] M. P., & Ferraro, G. (2003). Developing into series and returning from series: A note on the foundations of eighteenth-century analysis. Historia Mathematica, 30, 17-46.

[Ferraro III 2000] Ferraro, G. (2000). True and Fictitious Quantities in Leibniz's Theory of Series. Studia Leibnitiana, 32(1), 43-67. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/40694356

[Ferraro IV 2008] Ferraro, G. (2008). The rise and development of the Theory of Series up to the Early 1820s. New York: Springer.

[Jahnke 2003] Jahnke, Hans Niels. (2003). A history of analisis (Vol. 24). American Mathematical Society.

[Kleiner 1989] Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A Brief Survey. College Mathematical Journal.

[Leibniz 1693] Leibniz- Johann Bernoulli. (1693). Correspondencia de G.W. Leibniz - Johann Bernoulli. Cartas 1-275. Traducción Bernardino Orio de Miguel.http://www.oriodemiguel.com/traducciones.html

[Leibniz 1801] Leibniz, G. A treatise on fluxions. https://archive.org/stream/treatiseonfluxio02macl#p

[Leibniz 1684] Leibniz, G. (1684). Análisis infinitesimal. Acta Eroditum.

[Jahnke 2003] Jahnke, Hans Niels. (2003). A history of analisis (Vol. 24). American Mathematical Society.

[Maanen 2003] Maanen, J. V. (2003). Precursors of Differentiation and Integration. En H. N. Janhke, A history of analysis (págs. 41-72). Rhode Island: American Mathematical Society.

[Maclaurin 1801] Maclaurin, C. (1801). A treatise on fluxions. London https://archive.org/stream/treatiseonfluxio02macl#page/198/mode/2up.

[Mahoney 1994] Mahoney, M. (1994). The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601-1665. New Jersey : Princeton University Press.

[Medvedev 1991] Medvedev, F. A. (1991). Scenes from the History of Real Functions. (R. Cooke, Trad.) Boston: Birkhäuser Verlag Basel.

[Mendoza I 2014] Mendoza, G. J. (2014). Series de potencias en Newton- Leibniz. Revista Ejes , 2. Universidad del Tolima.

[Mendoza II 2013] Mendoza- Guzmán, J. E. (2013). A generalization of integrals by the fórmula of integration by parts. Revista Digital 360° , 8.

[1] Morató Jordi. (1996). Diccionario de Filosofía, editorial Herder S.A.

[Newton I 1711] Newton I, I. (1711). Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, ac differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis (Vol. 141). (A. J. Durán Guardeño, J. Pérez Fernández, Edits., & J. L. Tamayo Arantegui, Trad.) Londres, España: Real Sociedad Matemáticas Española.

[Newton II 1711] Newton II, I. (1711). Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden. (A. J. Duran Guardeño, F. J. Pérez Fernandez, Edits., & J. L. Arantegui Tamayo, Trad.) Real Sociedad Matemática Española SAEM Thales.

[Pascua 2003] Pascua, J. G. (2003). Aquiles, la Tortuga y el infinito. Revista de Filosofía, 28(2), 215-236.

[Recalde 2017] Recalde, L. C. (2017). Lecciones de Historia. Cali: Universidad del Valle.

[Ruthing] Ruthing, D. (1984). Some Definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. Math Intelligencer , 6, 72-77.

[Struik 1969] Struik, D. J. (1969). A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Harvard Univ. Press.

[Taylor 1715] Taylor, B. (1715). Methodus incrementorum Directa & inversa. Traducción por Ian Bruce.

[Urbaneja 2007] Urbaneja González, P. M. (2007). Raíces hitóricas y trascendencia de la geometría analítica. Revista Sigma, 205-236.

[Youschkevitch 1975] Youschkevitch, A. (1975). The Concept of function up to the Middle of the 19th Century.

[Wallis 1656] Wallis, J. (1656). The Arithmetic of Infinitesimals. (J. A. Stedall, Trans.) Springer-Verlag.

6. Anexos

6.1. Artículos publicados en relación con la tesis

Alrededor de esta tesis y de acuerdo a la continua investigación relacionada con la temática abordada, se han publicado los siguientes artículos:

1. Mendoza- Guzmán , J. E. (2013). A generalization of integrals by the formula of integration by parts. Revista Digital 360° , 8. Universidad Interamericana de Puerto Rico.`http://cremc.ponce.inter.edu/360/revista360/_Archivo%20Matematicas/cálculo/A%20Generalization%20of%20Integrals%20by%20the%20Formula%20of%20Integration%20by%20Parts.pdf`

2. Mendoza- Guzmán, J.E. (2013). Los polinomios particulares una definicion para exploraciones cartesianas. Revista Matemática, Educación e internet,14. Costa Rica. `https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V14_N1_2013/RevistaDigital_Mendoza_V14_n1_2013/RevistaDigital_Mendoza_V14_n1_2013.pdf`

3. Mendoza- Guzmán, Jorge Enrique (2014). Series de potencias en Newton- Leibniz. Revista ejes,2 Universidad del Tolima.`http://www.ut.edu.co/academi/images/archivos/fac_cien_educ/Mediaciones_Tecnologicas/eje_2_matem.pdf`

4. Mendoza-Guzmán, Jorge Enrique (2015). De la ecuación a la función: las primeras huellas del análisis. Revista ejes ,3 Universidad del Tolima.`http://www.ut.edu.co/academi/images/archivos/fac_cien_educ/Mediaciones_Tecnologicas/Revista_Ejes_3.pdf`

6.2. Serie de Taylor en términos modernos

Teorema 12. *Sea definida $f : [a, x] \subseteq R \to R$, tal que para todo $a < x$ tiene $f^{(n)}$derivadas que son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x), entonces existe $c \in (a, x)$ tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Donde $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Demostración. Fijemos x, y definase $F(y) = f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) - ... - \frac{f^n(y)(x-y)^n}{n!}$
Se puede mostrar usando inducción que $F'(y) = -\frac{f^{n+1}(y)(x-y)^n}{n!}$. Definamos una función G, tal que $G(y) = F(y) - \left(\frac{x-y}{x-a}\right)^{n+1} F(a)$, note que esta función satisface el teorema de Rolle puesto que en el intervalo $[a, x]$ es continua y derivable en el abierto, por tanto $G(a) = G(x) = 0$, por tanto existe $c \in (a, x)$ tal que $G'(c) = 0$.

Derivando G se obtiene

$$G'(y) = F'(y) - F(a)\frac{(x-y)^n}{(x-a)^{n+1}}(-1),$$

$G'(c) = 0 = F'(c) + F(a)\frac{(x-y)^n}{(x-a)^{n+1}}$ sustituyendo $F'(c) = -\frac{f^{n+1}(c)(x-c)^n}{n!}$ obtenemos como resultado

$$F(a) = \frac{f^{n+1}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Teorema 13. *Si existe una constante $M > 0$, tal que $|f^{n+1}(c)| \leq M$, para todo $c \in (a,x)$, y el residuo del teorema de Taylor satisface*

$$|R_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Demostración. Note que

$$|R_n(x)| = |\frac{f^{n+1}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}| \leq \frac{|f^{n+1}(c)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\, para\, todo\, c \in (a,x)$$

□

Teorema 14. *Sea I un intervalo, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^{n-1}(I)$. Si f es n veces derivable en un punto $a \in I$, entonces*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - T_n[f,a](x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración. Por el Teorema 1. se tiene que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

para todo x, donde a es fijo.

Reescribiendo esta igualdad obtenemos $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - f''(a)(x-a)^2 - ... - \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} = R_n(x)$

Tomemos $R_n(x) = f(x) - T_n[f,a]$. En el caso cuando $n = 1$, el polinomio de Taylor corresponde a

$T_1[f,a](x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, con lo que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - T_1[f,a](x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Supongamos que el teorema es cierto para $n = k$ es decir que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_k[f,a](x)}{(x-a)^k} = 0$, y consideremos el caso cuando $n = k{+}1$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{k+1}[f,a](x)}{(x-a)^{k+1}}.$$

Llamemos a $\alpha(x) = f(x) - T_{k+1}[f,a](x)$, $\omega(x) = (x-a)^{k+1}$, note que estas funciones satisfacen la hipótesis de la regla de L´Hopital, donde $\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} \omega(x) = 0$, luego

$$\frac{\alpha'(x)}{\omega'(x)} = \frac{f'(x) - T_{k+1}[f,a]'(x)}{(k+1)(x-a)^k} = \frac{1}{(k+1)} \frac{f'(x) - T_k[f',a](x)}{(x-a)^k}$$

Usando la hipótesis de inducción

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_k[f',a](x)}{(x-a)^{k+1}} = 0$$

$\square$

6.3. Demostración de la trascendencia de e por Euler

Teorema 15. *e es irracional.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $e = \frac{a}{b}$, donde a y $b \in \mathbb{Z}$ primos relativos. Tenemos que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

defínase el número

$$x = b!\left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!}$$

Es fácil ver que x es un número entero. Al acotar el número x y al sustituir $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ en la definición de x se tiene que

$$x = b!\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = b! \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

En efecto, x es mayor que cero.

Por otra parte

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(b+(n-b))} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}},$$

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}\right) = \frac{1}{b} < 1.$$

Lo cual representa una contradicción puesto que no existen enteros entre 0 y 1. $\square$